

DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Cristiana Maria de Alencar¹

Iago Vieira Alves de Moraes²

Joyce Saraiva Sindeaux³

RESUMO: O Teorema da Desigualdade Isoperimétrica é, possivelmente, um dos mais antigos da Geometria Diferencial. Na obra “Eneida”, do poeta romano Virgílio (70–19 a.C.), é relatado um episódio envolvendo a rainha Dido: ao buscar acolher seu povo em uma nova terra, Dido negociou com o rei local uma porção de território, o acordo estabelecia que ela poderia ficar com toda a área que conseguisse delimitar utilizando apenas uma única pele de boi. Demonstrando astúcia, Dido cortou o couro em tiras finíssimas, costurou-as, formando uma “corda” e delimitou uma região semicircular no litoral, maximizando, assim, a área obtida. Esse episódio, embora visto como uma lenda, antecipa de forma intuitiva a questão central do problema isoperimétrico: Dentre todas as curvas simples fechadas no plano com um dado comprimento L , qual delas delimita a maior área? A solução desse problema, o círculo, já era conhecida desde a Grécia Antiga. No entanto, uma demonstração rigorosa só foi apresentada em 1870 por K. Weierstrass. Diferentemente dos matemáticos que tentaram resolver o problema antes dele, K. Weierstrass não partiu do pressuposto de que uma solução existia. Ele conseguiu apresentar uma prova completa da existência de uma solução, utilizando sua teoria chamada de cálculo das variações, o que tornava a demonstração um pouco mais complexa. Mais tarde, foram desenvolvidas provas mais diretas elaboradas por E. Schmidt, em 1939, estas foram utilizadas para a demonstração do Teorema em estudo: Seja C uma curva plana simples e fechada com comprimento L , e seja A a área da região limitada por C . Então, $L^2 - 4\pi A \geq 0$, e verifica-se a igualdade se, e somente se, C é um círculo. Este trabalho tem como objetivo enunciar o Teorema da Desigualdade Isoperimétrica e demonstrá-lo. Para isso, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, tendo como referência principal, o livro Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, do Manfredo Perdigão do Carmo. Além disso, foram consultadas outras fontes bibliográficas para complementação teórica. Os resultados mostram que a igualdade ocorre apenas no caso do círculo, sintetizando de forma precisa o equilíbrio entre simetria e eficiência geométrica, destacando o círculo como a figura que melhor otimiza a relação entre perímetro e área. Conclui-se, portanto, que a Desigualdade Isoperimétrica é um resultado fundamental da Matemática que relaciona de forma elegante o perímetro e a área de figuras planas, verificando que o círculo é a forma que maximiza a área para um dado perímetro, confirmando tanto a intuição apresentada na lenda da rainha Dido, quanto a validade do Teorema.

Palavras-chave: Desigualdade Isoperimétrica. Geometria Diferencial. Curvas. Área.

¹ Universidade Regional do Cariri, e-mail: cristiana.alencar@urca.br

² Universidade Regional do Cariri, e-mail: iago.vieira@urca.br

³ Universidade Regional do Cariri, e-mail: joyce.sindeaux@urca.br



Referências

CARMO, Manoel Perdigão do. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

Folha: ‘A rainha da Fenícia e o problema isoperimétrico’ <https://impa.br/notices/folha-a-rainha-da-fenicia-e-o-problema-isoperimetrico/> acesso em: 01/10/2025.

PEREIRA, Ariana P. S. Quintão. A Desigualdade Isoperimétrica e uma Aplicação. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2012.