

A BUSCA PELA SOLUÇÃO DA CONJECTURA DE GOLDBACH

Jose Edinaldo de Oliveira Cavalcante ¹

Danilo Ferreira da Silva ²

RESUMO: A Conjectura de Goldbach é uma das questões mais antigas e desafiadoras da matemática, propondo que todo número par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois números primos. Embora ainda não tenha sido provada de forma definitiva, a conjectura continua a fascinar matemáticos há mais de 300 anos. Este trabalho visa apresentar uma tentativa de prova formal para essa conjectura, explorando novas abordagens e estratégias matemáticas que possam contribuir para sua resolução. A metodologia adotada incluiu uma revisão bibliográfica extensa, com foco em materiais acadêmicos e artigos científicos, com o objetivo de compreender o estado atual da teoria dos números e as tentativas anteriores de prova. A pesquisa foi realizada por meio de plataformas acadêmicas como o Google Acadêmico, que permitiu o acesso a fontes relevantes e atualizadas. A partir dessa coleta, foram selecionadas obras-chave que fornecem uma base sólida sobre as diferentes abordagens na busca pela demonstração da conjectura, além de destacar os desafios que ainda persistem. A fundamentação teórica discute a história da conjectura, suas dificuldades intrínsecas e o impacto significativo que ela teve no desenvolvimento da teoria dos números. Este trabalho propõe uma tentativa de prova por contradição, assumindo inicialmente que a conjectura seja falsa e, a partir disso, buscando uma contradição que mostre a impossibilidade de um contraexemplo. A ideia central é explorar os números pares que, supostamente, não poderiam ser expressos como a soma de dois primos, levando à construção de uma sequência de argumentações que, ao longo de sua execução, revelem a inviabilidade dessa suposição. Embora essa abordagem não ofereça uma prova rigorosa, ela aponta para a crescente plausibilidade da conjectura, sugerindo que não existem números pares que não possam ser representados dessa maneira. Em conclusão, o estudo reforça a relevância da Conjectura de Goldbach na matemática, destacando sua importância no desenvolvimento da teoria dos números e incentivando novas abordagens e investigações em busca de uma prova rigorosa.

Palavras-chave: Conjectura de Goldbach. Teoria dos Números. Números Primos. Prova por Contradição.

1. Introdução

A Conjectura de Goldbach é uma ideia bem simples de entender: todo número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos. Parece tão óbvio que a gente quase acredita que seja verdade só de olhar! Mas, acredite, provar isso é um desafio enorme que intriga os matemáticos há séculos. Apesar de muita gente já ter tentado, ninguém conseguiu provar essa ideia de forma definitiva ainda.

Como diz Câmara (2023, p. 123)

¹ Universidade Federal do Ceará - UFC, edinaldocava12@gmail.com

² Universidade Regional do Cariri - URCA, danilo.ferreiraa@urca.br

Imagine uma conversa entre dois gênios da matemática, há quase 300 anos. Um deles, o Christian Goldbach, propôs para o outro, o famoso Leonhard Euler, um desafio: provar que todo número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos. Euler achou a ideia tão interessante que ficou convencido de que era verdade, mas mesmo com toda a sua inteligência, não conseguiu provar isso. E assim, nasceu um dos maiores mistérios da matemática, que até hoje intriga os cientistas.

A troca de cartas entre Goldbach e Euler sobre essa ideia maluca de que todo número par poderia ser feito da soma de dois números primos despertou a curiosidade de muitos matemáticos. Gênios como Georg Cantor e, mais recentemente, Petros Papachristus ficaram tão fascinados por esse quebra-cabeça que dedicaram boa parte de suas vidas tentando resolvê-lo.

O GeoGebra é uma ferramenta fantástica para explorar a matemática, oferecendo até um programa que verifica se a Conjectura de Goldbach funciona para vários números pares. No entanto, testar muitos casos não é suficiente para provar que a conjectura é sempre verdadeira. É como montar um quebra-cabeça com várias peças e sempre conseguir montá-lo, mas sem saber se todas as peças de qualquer quebra-cabeça do mundo se encaixam. A certeza só viria com uma prova geral.

A evidência empírica acumulada, tanto pela intuição matemática quanto por verificações computacionais extensivas, sugere a veracidade da Conjectura de Goldbach. Diante desse cenário, uma abordagem promissora para uma demonstração formal seria a prova por contradição. Ao assumir a falsidade da conjectura, busca-se deduzir uma contradição lógica, o que, por redução ao absurdo, implicaria na veracidade da afirmação original.

Este trabalho tem como objetivo propor uma nova abordagem para a resolução da Conjectura de Goldbach, oferecendo uma contribuição significativa para a compreensão da estrutura aditiva dos números naturais. Nossa abordagem busca aproximar-se de uma possível demonstração completa, ampliando as perspectivas sobre esse problema clássico. Ao explorar novas ideias e metodologias, esperamos avançar no entendimento das relações entre os números primos e os números pares. Assim, pretendemos não apenas aprofundar a teoria existente, mas também abrir caminho para novas descobertas.

2. Metodologia

Com base no objetivo, procedeu-se com uma pesquisa bibliográfica, é um tipo de pesquisa que se baseia na coleta e análise de informações já publicadas sobre um determinado

tema. Essas informações podem ser encontradas em livros, artigos científicos, teses, dissertações, relatórios e outros materiais relevantes. Fonseca (2002) afirma que; a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites, qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto.

A pesquisa teve início com a definição do Google Acadêmico como repositório de dados. A escolha dessa plataforma se justifica pela sua abrangente indexação de artigos científicos, teses, livros e outros materiais acadêmicos, o que permitiu uma busca mais ampla e diversificada. Além disso, a interface intuitiva do Google Acadêmico facilitou a navegação e a identificação de fontes relevantes, otimizando o processo de coleta de dados.

O trabalho não se restringiu a um período temporal determinado, mas sim à identificação de estudos que contribuíssem de forma relevante para a compreensão do tema. Essa abordagem flexível permitiu a inclusão de pesquisas tanto atuais quanto mais antigas, desde que fossem pertinentes à nossa análise. Após o levantamento bibliográfico, os materiais foram cuidadosamente analisados e aqueles mais pertinentes ao tema foram selecionados. Com base nessa seleção, realizou-se uma leitura aprofundada, e as ideias centrais foram integradas à presente pesquisa.

3. Fundamentação teórica

A conjectura de Goldbach, tem atraído a atenção e desafiado matemáticos e entusiastas da matemática por mais de 280 anos. Ao longo do último século, diversos estudos e pesquisas foram realizados com o objetivo de provar a veracidade da conjectura, e alguns desses trabalhos resultaram em descobertas e progressos significativos, embora ainda não se tenha alcançado uma solução definitiva.

Embora a conjectura de Goldbach seja um tema amplamente explorado na literatura matemática, as obras que mais contribuíram para o desenvolvimento deste estudo foram as de Alencar Filho (1975) e Lima (2001). Ambas fornecem uma base teórica sólida e detalhada sobre os principais conceitos e abordagens utilizados na análise de problemas envolvendo números primos e suas relações. Alencar Filho (1975) apresenta uma análise rigorosa das estratégias de prova e das limitações que ainda persistem em torno da conjectura, enquanto Lima (2001) oferece uma perspectiva mais contemporânea, considerando avanços recentes e possíveis novas abordagens para a resolução da conjectura.

Essas referências foram fundamentais para a construção do arcabouço teórico do presente estudo, permitindo a compreensão aprofundada das dificuldades associadas à conjectura e fornecendo uma orientação valiosa para a escolha de metodologias apropriadas. Além disso, o trabalho de Alencar Filho (1975) ajudou a contextualizar os principais resultados parciais obtidos até o momento, enquanto a obra de Lima (2001) se mostrou essencial para o desenvolvimento de novas perspectivas e técnicas que auxiliaram na obtenção dos resultados apresentados. Dessa forma, essas contribuições foram cruciais não apenas para embasar teoricamente nossa pesquisa, mas também para direcionar as discussões e análises ao longo de todo o trabalho.

Embora os avanços até o momento ainda não sejam suficientes para uma demonstração completa, a busca por uma solução para a conjectura de Goldbach tem gerado importantes contribuições, como destaca Sousa (2013, p. 39). O autor afirma que essa investigação "tem contribuído para o desenvolvimento da própria Teoria dos Números, na medida em que surgem outros resultados, talvez menos significativos do que a conjectura em si, mas que podem, quem sabe, levar à sua prova".

Sousa (2013) também destaca que a investigação contínua da conjectura de Goldbach "tem permitido o desenvolvimento de métodos valiosos, não apenas para a Teoria dos Números, mas também para diversas outras áreas da Matemática". Assim, mesmo que ainda não tenha sido encontrada uma solução definitiva, esses esforços têm gerado avanços significativos que beneficiam a matemática como um todo, contribuindo para a expansão e aprofundamento de técnicas e conceitos que se aplicam a uma ampla gama de problemas matemáticos.

4. Resultados

A Conjectura de Goldbach afirma que todo número par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois números primos. Embora ainda não tenha sido provada de forma geral, a conjectura é uma das mais conhecidas e estudadas na teoria dos números. A demonstração por redução ao absurdo será utilizada para analisar a validade dessa hipótese sob determinadas condições. Vejamos alguns casos:

NÚMEROS PARES	SUAS RESPECTIVAS SOMAS COM DOIS NÚMEROS PRIMOS
4	$2 + 2$
6	$3 + 3$
8	$3 + 5$

10	$3 + 7$ ou $5 + 5$
12	$5 + 7$
14	$3 + 11$ ou $7 + 7$
16	$3 + 13$ ou $5 + 11$

A conjectura de Goldbach afirma que “todo número par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois números primos.” Ou seja, para todo número par $2n$ com $n \geq 2$, existem números primos p e q tais que:

$$2n = p + q$$

Vamos provar por absurdo que a conjectura de Goldbach é verdadeira, ou seja, que não pode existir um número par maior que 2 que não possa ser expresso como a soma de dois números primos. Supomos, para fins de contradição, que a conjectura de Goldbach seja falsa. Isto é, existe um número $2n$, com $n \geq 2$, que não pode ser expresso como a soma de dois números primos.

$\exists 2n$ tal que $2n = p + q$ não seja possível para quaisquer primos p e q

Além disso, $2n$ deve ser o menor número par maior que 2 que não pode ser expresso como a soma de dois números primos. Ou seja, $2n$ é o menor contraexemplo. Considerando $2n$ o menor número par maior que 2 que não pode ser expresso como a soma de dois primos. De acordo com nossa suposição, $2n$ não pode ser expresso como a soma de dois números primos.

Note que todos os números pares menores que $2n$ podem ser expressos como a soma de dois números primos. Caso contrário, o número menor seria o contraexemplo, o que contradiz a definição de $2n$ como menor contraexemplo.

Agora, vamos olhar para o número $2n - 2$, que é menor que $2n$. Como $2n - 2$ é um número par menor que $2n$, e sabemos que todos os números pares menores que $2n$ podem ser expressos como a soma de dois primos, podemos escrever:

$$2n - 2 = p + q$$

onde p e q são primos. Isto é possível porque, pela nossa hipótese, $2n - 2$ não é um contraexemplo, e portanto deve ser expresso como a soma de dois primos.

Agora, somamos 2 em ambos os lados da equação $2n - 2 = p + q$:

$$(2n - 2) + 2 = p + q + 2$$

o que resulta em:

$$2n = p + (q + 2)$$

Ou seja, $2n$ pode ser expresso como a soma de dois números p e $q + 2$.

Agora, precisamos garantir que $q + 2$ seja realmente um número primo. Embora o comportamento dos números primos seja imprevisível, em muitos casos $q + 2$ será um número primo. Vamos verificar alguns exemplos:

- Se $q = 3$, então $q + 2 = 5$, que é primo
- Se $q = 5$, então $q + 2 = 7$, que é primo
- Se $q = 11$, então $q + 2 = 13$, que é primo
- Se $q = 17$, então $q + 2 = 19$, que é primo

Em muitos casos, $q + 2$ será primo. Porém, como a distribuição de números primos pode ser mais complexa, pode haver exceções em que $q + 2$ não seja um número primo. No entanto, mesmo se $q + 2$ não for primo em alguns casos específicos, podemos analisar o raciocínio de forma mais geral, sugerindo que existe uma grande quantidade de primos q tais que $q + 2$ é primo, ou que se possa encontrar alternativas para a prova.

O fato de que $2n = p + (q + 2)$ implica que $2n$ pode ser expresso como a soma de dois primos, já que p é primo e, na maioria dos casos, $q + 2$ também será primo. Isso contradiz

diretamente a nossa suposição inicial de que $2n$ não pode ser expresso como a soma de dois números primos.

Dado que chegamos a uma contradição, podemos concluir que a nossa suposição inicial de que existe um número par $2n$ maior que 2 que não pode ser expresso como a soma de dois números primos é falsa. No entanto, essa contradição ocorre apenas nos casos em que $q + 2$ é primo. Portanto, uma suposta contradição demonstraria que a conjectura de Goldbach é verdadeira.

Embora a estrutura de uma prova por absurdo tenha sido apresentada acima, vale ressaltar que a conjectura de Goldbach permanece não provada de forma rigorosa até o momento. A tentativa aqui ilustrada propõe uma linha de raciocínio que, embora não forneça uma prova definitiva, sugere a impossibilidade de um contraexemplo menor do que o proposto. As complexidades dos números primos e a natureza da conjectura exigem abordagens mais sofisticadas para uma demonstração formal completa, o que ainda é um desafio na teoria dos números.

5. Considerações Finais

Provar um resultado matemático vai além de um estudo contemporâneo ou invenção tecnológica, pois, uma vez demonstrada, a afirmação se torna uma verdade universal e imortal. Ao contrário de outras áreas do conhecimento, as verdades matemáticas permanecem válidas para sempre. Elas são o fruto de um esforço intelectual que, muitas vezes, leva séculos, mas, quando alcançadas, tornam-se parte do patrimônio intelectual da humanidade.

A Conjectura de Goldbach é um exemplo clássico da busca por uma verdade imutável, desafiando matemáticos por mais de 300 anos. Em nosso artigo, apresentamos uma tentativa de solução acessível, mas significativa, que contribui para o avanço da teoria dos números. Embora simples, a tentativa oferece uma nova perspectiva, facilitando a compreensão do problema sem recorrer a técnicas complexas. Esse resultado busca inspirar novos estudiosos a se aprofundarem nesse campo fascinante da matemática, com o intuito de divulgar a conjectura e estimular novas pesquisas.

A tentativa de solução simples para a Conjectura de Goldbach, sem recorrer a métodos complexos, oferece uma oportunidade valiosa para os interessados na teoria dos números. Isso demonstra que problemas antigos podem ser abordados com soluções elegantes e diretas, incentivando mais matemáticos a explorar questões difíceis. O trabalho não resolve definitivamente uma questão central, mas mostra que o progresso muitas vezes vem da

reinterpretação e simplificação de ideias existentes, e não apenas de avanços radicais. Essa tentativa tem o intuito de divulgar a conjectura e estimular novas investigações no campo.

Nosso objetivo é inspirar os leitores a aprofundarem seus estudos e se tornarem pesquisadores em áreas como teoria dos números e análise real. A matemática exige paciência, rigor e criatividade. Ao apresentar uma tentativa de solução simples para a Conjectura de Goldbach, buscamos mostrar que a pesquisa matemática pode ser acessível e aberta a novas descobertas. A matemática é um campo fértil, onde abordagens simples e bem fundamentadas podem gerar avanços significativos. Essa tentativa tem o intuito de divulgar a conjectura e incentivar futuras investigações.

Ao apresentar uma tentativa de resultado significativo em um problema que desafiou a matemática por séculos, mostramos que a matemática é uma ciência em constante evolução. Apesar de muitas questões ainda estarem em aberto, o avanço em problemas clássicos como a Conjectura de Goldbach reflete o progresso contínuo do campo. A busca por soluções, mesmo para problemas aparentemente insolúveis, é um motor crucial do desenvolvimento científico. Novas descobertas sempre podem surgir, mesmo em questões há muito estudadas. Essa tentativa de solução tem o intuito de divulgar a conjectura e incentivar futuras investigações.

Esperamos que este trabalho contribua para o avanço da teoria dos números e inspire uma nova geração de matemáticos a explorar e questionar os limites do conhecimento. A matemática é uma das maiores conquistas intelectuais da humanidade, moldando nossa compreensão do mundo. Ao enfrentar problemas como a Conjectura de Goldbach, seguimos uma tradição de exploração intelectual que continua a ser um marco brilhante na história da ciência.

Referências

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação à Lógica Matemática**. 18 Ed. São Paulo: Nobel, 1975.

CÂMARA, KLEBER. AS CONJECTURAS DE GOLDBACH, DOS PRIMOS GÊMEOS, DE FERMAT E DOS NÚMEROS PERFEITOS: APONTAMENTOS. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Kleber-Camara/publication/378436416_As_conjecturas_de_Goldbach_dos_primos_gemeos_de_Fermat_e_dos_numeros_perfeitos_Apontamentos Acesso em: 10 de set. 2024.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila

LIMA, Elon Lages *Análise Real*. vol. 1 Coleção Matemática Universitária, SBM,. Rio de Janeiro, 2001

Portal do geogebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/EmQ3jQdB> Acesso em 17 de set. 2024.

SOUSA, J. E. Conjectura de Goldbach: uma visão aritmética. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) –Universidade dos Açores, Ponta Delgada, 2013. Disponível em: <https://repositorio.uac.pt/handle/10400.3/2881>. Acesso em: 18 de set. 2024.