

Nem sempre $1 + 1 = 2$

Marciana Ferreira Gomes¹

Ana Clécia dos Santos Nascimento²

Joyce Saraiva Sindeaux³

RESUMO: Nesse trabalho vamos tratar sobre grupos. Grupos são estruturas algébricas que relacionam conjuntos não vazios, contendo uma ou mais operações. Assim, apresentaremos especificamente, o grupo $\mathbb{Z}_n$, munido de uma operação de adição. Grupo este, cujos elementos são classes de equivalência. Apresentaremos também, as propriedades da operação aditiva de $\mathbb{Z}_n$, bem como alguns resultados envolvendo esse grupo. Uma das características interessantes desse grupo é a possibilidade de operar os números inteiros de forma diferente da usual, por meio das classes de equivalência. Em particular, quando $n = 2$ mostraremos que, $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$, o que foge do que estamos habituados e do que seria esperado em $\mathbb{Z}$.

Palavras-chave: Grupos; Classe de equivalência; Operação.

1 Introdução

O matemático francês, Evariste Galois, no século XIX, ao estudar condições para que um polinômio pudesse ser respondido por meio raízes, acredita-se que ele não resolveu somente este problema. Por meio das condições e do estudo de Grupos, ele conseguiu desvendar a matemática abstrata utilizando também o estudo da simetria. Segundo Kochloukova e Silva,

Em matemática, Teoria de Grupos é o ramo que estuda estruturas algébricas, chamadas grupos. Uma das principais motivações para o estudo do conceito de grupos é dada pelo fato que a Teoria de Grupos fornece um ambiente matematicamente rigoroso para entender simetrias. (KOCHLOUKOVA; SILVA, 2020).

O curso de licenciatura em matemática, aborda disciplinas que trazem um grau de dificuldade e de abstração, além de auxiliar na resolução de situações algébricas, como é o caso da disciplina de Estruturas Algébricas, onde estudados a Teoria de Grupos.

¹ Universidade Regional do Cariri, e-mail: marciana.ferreira@urca.br

² Universidade Regional do Cariri, e-mail: anaclecia.santos@urca.br

³ Universidade Regional do Cariri, e-mail: joyce.sindeaux@urca.br

Desde a educação infantil até os anos finais, têm-se como verdade absoluta que $1+1$ é igual a 2. Através, da disciplina de Estruturas Algébricas, podemos entender que existe ideias que desconstrói pensamentos e respostas que foram ensinadas como uma verdade absoluta dentro da educação matemática. Podemos, por meio do estudo metodológico de grupos, compreender que existem conjuntos específicos que nos levam a desmistificar a ideia que ao longo da vida estudantil ouvimos.

Aqui, vamos apresentar algumas definições importantes, como a definição de classe de equivalência e a definição de grupo. Bem como, vamos definir o conjunto $\mathbb{Z}_n$ e a operação de adição dele. Por fim, provaremos que $\mathbb{Z}_n$ é um grupo comutativo, e que no caso especial onde $n = 2$, temos que $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ em $\mathbb{Z}_2$.

2 Metodologia

A abordagem metodológica deste trabalho compreende a revisão bibliográfica de parte da obra intitulada *Introdução à álgebra* do autor Adilson Gonçalves (GONÇALVES, 2015) e das notas de aula do Professor Nataniel Dantas (DANTAS, 2009). Este estudo é fruto das atividades desenvolvidas na turma de Estruturas Algébricas, semestre 2024.1, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Regional do Cariri, *campus* Bárbara de Alencar.

3 Fundamentação teórica

O trabalho trata de um tema clássico em Álgebra Abstrata. Para abordá-lo fazemos uso dos conceitos básicos da disciplina de Estruturas Algébricas, fundamentadas na teoria apresentada no livro *Introdução à álgebra* (GONÇALVES, 2015).

4 Resultados

A seguir, apresentaremos algumas noções básicas sobre as relações de equivalência, a começar pela definição. Inicialmente, consideremos um conjunto A no qual esteja definida uma relação $\sim$ entre os pares de A . Escrevemos $x \sim x'$, se $x, x' \in A$ estão relacionados.

Definição 4.1. Dizemos que uma relação $\sim$ como acima é uma *relação de equivalência* em A se as seguintes propriedades são verificadas para todo $x, y, z \in A$

- a) $x \sim x$;
- b) Se $x \sim y$, então $y \sim x$;
- c) Se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

Dado $n \in \mathbb{Z}$, seja J o conjunto dos múltiplos de n em $\mathbb{Z}$, definido por

$$J = n\mathbb{Z} := \{nx : x \in \mathbb{Z}\}.$$

Vamos definir em J a relação $\equiv (\text{mod } n)$ dada por

$$x, x' \in \mathbb{Z}, x \equiv x' (\text{mod } n) \iff x - x' \in J.$$

Essa relação define uma relação de equivalência em J . Com efeito, claramente temos que $x \equiv x (\text{mod } n)$, pois $x - x = 0 \in J$. Além disso, se $x \equiv y (\text{mod } n)$, então $x - y \in J$, ou seja, $x - y = nq$ para algum $q \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$y - x = -(x - y) = n(-q) \in J$$

e, portanto, $y \equiv x (\text{mod } n)$. Por fim, se $x \equiv y (\text{mod } n)$ e $y \equiv z (\text{mod } n)$, existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que

$$x - y = nr \text{ e } y - z = ns.$$

Daí,

$$x - z = x - y + y - z = nr + ns = n(r + s) \in J.$$

Logo, $x \equiv z (\text{mod } n)$. Portanto, $\equiv (\text{mod } n)$ define uma relação de equivalência em J .

Neste caso, usaremos a notação

$$\bar{x} = x + J = \{x + kn : k \in \mathbb{Z}\}$$

para descrever a classe de equivalência de x em relação a $\equiv (\text{mod } n)$.

Definição 4.2. $\mathbb{Z}_n$ é o conjunto contendo as n classes de equivalências abaixo

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

Observação 4.3. Se $x \equiv y (\text{mod } n)$, então $\bar{x} = \bar{y}$ em $\mathbb{Z}_n$.

Exemplo 4.4. Consideremos $n = 6$, então $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Vamos determinar a qual classe pertence o 6 e 8 em $\mathbb{Z}_6$. Observe que

- $6 = 6 - 0 \Rightarrow 6 \equiv 0 (\text{mod } 6) \Rightarrow 6 \in \bar{0}$
- $8 = 8 - 2 = 6 \Rightarrow 8 \equiv 2 (\text{mod } 6) \Rightarrow 8 \in \bar{2}$

Vamos agora apresentar algumas propriedades da relação definida anteriormente.

Proposição 4.5. Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $x \equiv x' (\text{mod } n)$ e $y \equiv y' (\text{mod } n)$, então

$$x + y \equiv x' + y' (\text{mod } n).$$

Demonstração. Por hipótese, temos que

$$x - x' = kn \text{ e } y - y' = sn.$$

Logo,

$$\begin{aligned}(x + y) - (x' + y') &= (x - x') + (y - y') \\ &= kn - sn \\ &= (k + s)n.\end{aligned}$$

Portanto,

$$x + y \equiv x' + y' \pmod{n}.$$

□

Proposição 4.6. Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $\bar{x} = \bar{x'}$ e $\bar{y} = \bar{y'}$. Então $\overline{x + y} = \overline{x' + y'}$.

Agora definir uma operação aditiva no conjunto $\mathbb{Z}_n$.

Definição 4.7. Podemos definir a *operação de adição em $\mathbb{Z}_n$* dada por

$$\begin{aligned}+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n &\rightarrow \mathbb{Z}_n \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\mapsto \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}\end{aligned}$$

Exemplo 4.8. Consideremos $n = 4$, então $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Vamos calcular $\bar{1} + \bar{3}$ em $\mathbb{Z}_4$. Pela Definição anterior, temos

$$\bar{1} + \bar{3} = \overline{1 + 3} = \bar{4}.$$

Como $4 - 0 \in 4\mathbb{Z}$, temos que $4 \equiv 0 \pmod{4}$. Assim, $\bar{4} = \bar{0}$. Logo,

$$\bar{1} + \bar{3} = \bar{0}$$

em $\mathbb{Z}_4$.

Definição 4.9. Dado um conjunto G não vazio, defina uma operação sobre os pares de G da seguinte forma:

$$\begin{aligned}* : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto a * b\end{aligned}$$

Dizemos que G é um *grupo* se

(G_1) $*$ é *associativa* em G , ou seja,

$$a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G.$$

(G_2) Existe $e \in G$, *elemento neutro* de G , ou seja,

$$a * e = e * a = a \quad \forall a \in G$$

(G_3) Todo elemento de G admite um *inverso*, ou seja,

$$a * b = b * a = e \quad \forall a, b \in G.$$

Definição 4.10. Se $(G, *)$ é um grupo e além disso G satisfizer a propriedade abaixo

(G_4) $*$ é *comutativa*, ou seja,

$$a * b = b * a \quad \forall a, b \in G$$

dizemos que G é um *grupo abeliano* ou *grupo comutativo*.

Teorema 4.11. $\mathbb{Z}_n$ com a operação de adição dada na Definição 4.7 é um grupo abeliano.

Demonstração. De fato, note que dados $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_n$, temos

$$(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \overline{x + y} + \bar{z} = \overline{(x + y) + z} = \overline{x + (y + z)} = \bar{x} + \overline{y + z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}).$$

Logo, $+$ é associativa. Além disso, dado $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$, segue que

$$\bar{a} + \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a}.$$

Ou seja, $\bar{0}$ é o elemento neutro. Novamente, dado $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$, temos

$$\bar{a} + \overline{(-a)} = \overline{a + (-a)} = \bar{0}.$$

Portanto, $\overline{(-a)}$ é o inverso de $\bar{a}$. Segue então que $(G, +)$ é um grupo. Por fim, dados $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ temos

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} = \overline{b + a} = \bar{b} + \bar{a}.$$

Portanto, o grupo G com esta operação é um grupo abeliano. □

Por fim, vamos calcular $\bar{1} + \bar{1}$ em $\mathbb{Z}_2$.

Exemplo 4.12. Temos que, para $n = 2$, $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Logo,

$$\bar{1} + \bar{1} = \overline{1 + 1} = \bar{2}.$$

Como $2 - 0 \in 2\mathbb{Z}$, segue que $2 \equiv 0 \pmod{2}$, assim, $\bar{2} = \bar{0}$. Portanto,

$$\bar{1} + \bar{1} = \overline{1 + 1} = \bar{0}.$$

5 Considerações Finais

Este trabalho apresentou de forma metodológica a resolução de um exemplo, dentro da álgebra abstrata, por meio da definição de grupo e da interação de elementos que descrevem as classes de equivalência. O exemplo apresentado foi especificamente o grupo $\mathbb{Z}_2$ que exemplifica bem o título desse trabalho, que nem sempre $1 + 1 = 2$. Nesse exemplo particular, temos um 1 diferente, e a operação de adição também não é a usual, resultando em $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$.

Referências

DANTAS, N. O. Estruturas Algébricas I. 2009. Acesso em: 18 nov. 2024. Disponível em: <<https://cesad.ufs.br/ORBI/public/uploadCatalago/>>.

GONÇALVES, A. Introdução à álgebra. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

KOCHLOUKOVA, D. H.; SILVA, C. R. H. do A. Introdução a teoria de grupos. In: XXVIII Congresso vitural de iniciação científica da Unicampa. Campinas: [s.n.], 2020.