

O Teorema de Jordan Regular

Patricia da Silva Pereira
Flávio França

Resumo: Neste trabalho abordaremos um dos resultados clássicos da Geometria Diferencial – O Teorema de Jordan. De maneira geral e simplificada, o teorema afirma que *uma curva fechada simples divide o plano em dois conjuntos disjuntos, conexos e não vazios*. Iremos enunciar e provar este resultado no caso em que a curva é regular e de classe C^2 . Apesar de intuitivo, a demonstração da versão geral do Teorema de Jordan é complexa e não será abordada aqui.

Palavras-Chaves: Curvas Planas. Teorema de Jordan Regular.

1 Introdução

A prova do teorema de Jordan representa um marco na história da matemática, destacando-se pela complexidade que surpreendeu os estudiosos de sua época. Apesar de sua importância, a demonstração inicial continha lacunas que intrigavam os matemáticos. Ao longo da literatura matemática, diversas provas foram desenvolvidas para abordar o teorema de Jordan, especialmente no caso em que a curva é apenas contínua, apresentando, muitas vezes, um grau considerável de complexidade. O teorema de Jordan, embora possa parecer intuitivamente evidente, revela-se desafiador em sua formalização matemática. Surpreendentemente, a dificuldade na demonstração muitas vezes passa despercebida, pois a crença na veracidade do resultado é natural. No entanto, a disparidade entre intuição e formalização se destaca, evidenciando que, na matemática, desenhar e provar são de fato coisas distintas.

Nesta abordagem, concentraremos nossa atenção no caso em que a curva é regular e pertence à classe C^2 , explorando hipóteses adicionais que simplificam a prova do teorema de Jordan. Para enunciar o teorema devemos antes apresentar algumas definições, como as noções de curva fechada, curva simples, curva de Jordan e conjunto conexo.

Vamos apresentar algumas definições relacionadas a curvas planas regulares. Uma curva plana regular é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\forall t \in I, \alpha'(t) \neq 0$.

Definição 1. (Curva simples) Uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita simples se a aplicação α for injetiva em $[a, b]$.

Definição 2. (Curva Fechada) Uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita fechada se $\alpha(a) = \alpha(b)$. **Definição**

3. (Curva de Jordan) Uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é chamada de curva de Jordan se for uma curva simples e fechada.

Definição 5. (Conjunto conexo) Um subconjunto $\mathbf{A}$ de $\mathbb{R}^2$ é dito conexo se, para qualquer par de pontos $p, q \in \mathbf{A}$, existe uma curva contínua $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}$ contida em $\mathbf{A}$, ligando $\gamma(0) = p$ à $\gamma(1) = q$.

2 Objetivo

O trabalho tem como objetivo enunciar e provar o Teorema de Jordan regular.

Teorema de Jordan Regular: Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de Jordan e de classe C^2 . O complementar do traço de α em $\mathbb{R}^2$, é a união de dois conjuntos disjuntos, conexos, não vazios e com fronteira de cada um igual ao traço de α .

A ideia para a demonstração do Teorema de Jordan Regular é que, uma vez admitindo que a curva regular é de classe C^2 , é possível a construção de uma vizinhança tubular de maneira uniforme ao

longo da curva a a partir do campo normal diferenciável, separando assim seu complementar em duas componentes conexas por caminhos.

3 Metodologia

As informações e resultados apresentado neste trabalho foram obtidos por estudo individual, seminários e pesquisa bibliográfica.

4 Referências

ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy. Geometria das Curvas Planas, Universidade Federal de Goiás, 2002