

Estimativa de altura para gráficos CMC no $\mathbb{R}^3$

*Phillipe Rodrigues Gonçalves*¹ & *Flávio França Cruz*²

Resumo

Apresentamos a dedução de algumas equações elípticas sobre superfícies de curvatura média constante (superfícies CMC) no espaço euclidiano tridimensional e, aplicando o Princípio do Máximo, deduzimos propriedades geométricas destas superfícies a partir da teoria de EDPs elípticas.

Palavras-chave : Gráficos; Equações Elípticas; Superfícies de Curvatura Média Constante.

Height estimates for CMC graphics in $\mathbb{R}^3$

Abstract

We present the deduction of some elliptic equations on surfaces of constant mean curvature (CMC surfaces) in the three-dimensional Euclidean space and, applying the Maximum Principle, we deduce geometric properties of these surfaces from the theory of elliptic EDPs.

Keywords: Graphs, Elliptic Equations, Constant Mean Curvature Surfaces.

¹Licenciatura em Matemática/URCA - PIBIC/CNPQ e-mail: phillipemath14@gmail.com

²Universidade Regional do Cariri/URCA e-mail:flavio.franca@urca.br

1 Introdução

Nesse trabalho, apresentaremos algumas estimativas de altura para superfícies que são gráficos que tenham a curvatura média constante, e em alguns casos, podendo até mesmo definir parte dessas superfícies. Como temos que, localmente, toda superfície é um gráfico, então apartir do Teorema 1 a seguir, será possível obter alguns resultados de altura, para qualquer vizinhança que tomarmos em uma superfície com CMC.

2 Objetivos

Nosso principal objetivo é inicialmente apresentar a dedução, com riqueza de detalhes, de algumas equações elípticas sobre uma superfície CMC.

As equações fundamentais para nosso propósito são dadas na seguinte:

Proposição 1 *Seja M uma superfície de curvatura média constante H . Então*

$$\Delta f_a = 2H\ell a \quad (2.1)$$

$$\Delta |x|^2 = 4 + 4H\langle N, x \rangle \quad (2.2)$$

tal que $f_a = \langle x, a \rangle$ e $\ell a(x) = \langle N(x), a \rangle$, $x \in M$.

Aplicando a mesma técnica obteremos ainda as equações:

$$\Delta \ell a + |\sigma|^2 \ell a = 0 \quad (2.3)$$

$$\Delta \langle N, x \rangle = -2h - |\sigma| \langle N, x \rangle \quad (2.4)$$

onde σ denota a segunda forma fundamental de M .

Posteriormente com o auxilio do Princípio do Máximo Fraco obteremo informações geométricas sobre a superfície, através do teorema abaixo:

Teorema 1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e $H \in \mathbb{R}$. Seja M o gráfico de uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Seja $e_3 = (0, 0, 1)$ e consideremos uma orientação em M tal que $\langle N, e_3 \rangle \geq 0$.*

i) *Se $H > 0$ então*

$$\min_{\partial\Omega} u - \frac{1}{H} \leq u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

Além disso, se existir um $x_0 \in \Omega$ tal que,

$$u(x_0) = \min_{\partial\Omega} u - \frac{1}{H}$$

então S é um pedaço de esfera de raio $\frac{1}{H}$.

ii) *Se $H < 0$ então*

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u \leq \max_{\partial\Omega} u - \frac{1}{H}.$$

Além disso, se existir um $x_0 \in \Omega$ tal que,

$$u(x_0) = \max_{\partial\Omega} u - \frac{1}{H}$$

então S é um pedaço de esfera de raio $-\frac{1}{H}$.

iii) Se $H = 0$ então

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

Além disso, se existir $h \neq 0$ e $u = 0$ no $\partial\Omega$, então

$$|u| \leq \frac{1}{|H|}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, Ω é um disco e S é um hemisfério.

3 Preliminares

Para a dedução e demonstração das equações elípticas, iremos precisar do operador laplaciano. Iniciemos lembrando que o laplaciano de uma função $f : S \mapsto \mathbb{R}$ suave é definido por

$$\Delta f(p) = \text{tr}(\nabla^2 f)(p)$$

ou seja,

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{e_i}^2 f, e_i \rangle$$

Depois de deduzir tais equações, como dito anteriormente, iremos aplicar o princípio do máximo fraco para o laplaciano:

Teorema 2 (*Princípio do máximo fraco*): Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, tal que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

i) Se $\Delta u \geq 0$ então

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

ii) Se $\Delta u \leq 0$ então

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Ao longo da pesquisa iremos trabalhar com estudos sobre a curvatura média de gráfico, ou seja, é primordial entendermos bem a definição de uma superfície que é um gráfico, e de como se comporta a sua curvatura média. Preparamos o próximo tópico abordando tal resultado.

3.1 Curvatura Média de Gráficos

Inicialmente lembremos que, uma superfície diferencial do $\mathbb{R}^3$ e um conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ para qual cada ponto $p \in S$ possui uma vizinhança que é difeomorfo a um aberto do $\mathbb{R}^2$, ou seja, para cada $p \in S$ existem um aberto V do $\mathbb{R}^3$, um aberto do $\mathbb{R}^2$ e uma aplicação $X : U \mapsto V \cap S$ que é um difeomorfismo.

Obs: Note que $X^{-1} : V \cap S \mapsto U$ está definida em um conjunto do $\mathbb{R}^3$. Então o que significa diferenciabilidade nesse contexto?

Resposta:

Definição: Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ qualquer. Diz-se que $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $p \in A$ se existir um aberto U do $\mathbb{R}^3$ com $p \in U$ e uma aplicação $F : U \mapsto \mathbb{R}^m$ diferenciável em p e tal que

$$F|_{U \cap A} = f|_{U \cap A}$$

Neste caso, diz-se que F é uma extensão de f

Um caso particularmente interessante de superfície é um gráfico: Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e uma função diferenciável $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, e o gráfico de u :

$$\Sigma = \{(x, y, u(x, y)); (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3$$

é uma superfície do $\mathbb{R}^3$ que pode ser parametrizado por

$$\begin{aligned} X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto X(x, y) = (x, y, u(x, y)) \end{aligned}$$

Observação: pode-se provar que toda superfície é localmente um gráfico, ou seja, todo ponto da superfície possui uma vizinhança que é um gráfico.

Recordemos que o espaço tangente de Σ em p , $T_p\Sigma$, é o plano do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $X_x = \frac{\partial X}{\partial x}(p)$ e $X_y = \frac{\partial X}{\partial y}(p)$. Em que,

$$\begin{aligned} X_x &= \left(1, 0, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ X_y &= \left(0, 1, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

O vetor normal a Σ em p é o vetor unitário N que satisfaz

$$\langle N, X_x \rangle = \langle N, X_y \rangle = 0$$

e

$$||N|| = 1$$

Vamos determina

$$N = (a, b, c)$$

que satisfaz esta condição

$$0 = \langle N, X_x \rangle = \langle (a, b, c), (1, 0, \frac{\partial u}{\partial x}) \rangle = a + c \frac{\partial u}{\partial x}$$

ou seja,

$$a + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad b + c \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Daí,

$$N = \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}, -c \frac{\partial u}{\partial y}, c\right)$$

como

$$1 = ||N|| = c^2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 1 \right)$$

obtemos,

$$c = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + ||\nabla u||^2}}$$

em que $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

Assim N pode ser definida por

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}}(-\nabla u, 1)$$

ou

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}}(\nabla u, -1)$$

A curvatura média H de uma superfície é por definição o traço de um operador de Weingarten $A : T_p \Sigma \mapsto T_p \Sigma$ dado $A(v) = -D_v N$,
vamos calcular

$$2H = \text{tr}(A)$$

no caso de um gráfico Σ

Primeiro vamos calcular a matriz de A em relação a base $\{X_x, X_y\}$. Temos

$$\begin{aligned} A(X_x) &= A(1, 0, \frac{\partial u}{\partial x}) \\ &= -D_{(1,0,\frac{\partial u}{\partial x})} N \\ &= -D_{(1,0,0)} N - \frac{\partial u}{\partial x} D_{(0,0,1)} N \end{aligned}$$

pois $D(\cdot)$ é linear, e pela expressão de N temos que

$$D_{(0,0,1)} N = 0$$

e

$$D_{(1,0,0)} N = D_{(1,0,0)} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1 \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) D_{(1,0,0)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1 \right)$$

portanto, obtemos que

$$\begin{aligned} A(X_x) = -D_{(1,0,0)} N &= \frac{1}{\sqrt{(1 + \|\nabla u\|^2)^3}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1 \right) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, 0 \right) \end{aligned}$$

realizando algumas manipulações algébricas obtemos

$$\begin{aligned} A(X_x) &= -\frac{1}{\sqrt{(1 + \|\nabla u\|^2)^3}} ((1 + u_y^2)u_{xx} - u_x u_y u_{xy}, (1 + u_x^2)u_{xy} - u_x u_y u_{xx}, u_x u_{xx} + u_y u_{xy}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{(1 + \|\nabla u\|^2)^3}} [((1 + u_y^2)u_{xx} - u_x u_y u_{xy})(1, 0, u_x) \\ &\quad + ((1 + u_x^2)u_{xy} - u_x u_y u_{xx})(0, 1, u_y)] \end{aligned}$$

Da mesma forma obtemos $A(X_y)$, que é dado por

$$\begin{aligned} A(X_y) &= -\frac{1}{\sqrt{(1 + \|\nabla u\|^2)^3}} [((1 + u_y^2)u_{yx} - u_x u_y u_{yy})(1, 0, u_x) \\ &\quad + ((1 + u_x^2)u_{yy} - u_x u_y u_{yx})(0, 1, u_y)] \end{aligned}$$

Portanto a matriz do operador de Weingarten A de Σ na base $\{X_x, X_y\}$ será

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{\sqrt{(1 + \|\nabla u\|^2)^3}} \begin{pmatrix} (1 + u_y^2)u_{xx} - u_x u_y u_{xy} & (1 + u_y^2)u_{yx} - u_x u_y u_{yy} \\ (1 + u_x^2)u_{xy} - u_x u_y u_{xx} & (1 + u_x^2)u_{yy} - u_x u_y u_{yx} \end{pmatrix}$$

Como a curvatura média de Σ é o traço do operador A , então

$$\begin{aligned} 2H = \text{tr}(A) &= -\frac{1}{\sqrt{(1 + \|\nabla u\|^2)^3}} ((1 + u_y^2)u_{xx} - u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} - u_x u_y u_{yx}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{(1 + \|\nabla u\|^2)^3}} ((1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy}) \end{aligned}$$

Vimos que o gráfico $\Sigma = \{(x, y, u(x, y)); (x, y) \in \Omega\}$ tem curvatura média H dada por

$$(*) \quad -2H \sqrt{(1 + \|\nabla u\|^2)^3} = (1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy}$$

quando é orientada pela normal "upwards"

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} (\nabla u, -1)$$

se escolhermos a orientação "downwards" $-N$ então a equação $(*)$ é mantida mas sem o sinal de menos no primeiro membro.

Proposição: A equação $(*)$ pode ser reescrita como

$$(**) \quad -\text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = 2H$$

Onde div é o operador divergente que atua em campos de vetores $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ da seguinte forma

$$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) \Rightarrow \text{div}(F) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

Prova: Por definição de divergente,

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) &= \text{div} \left((1 + \|\nabla u\|^2)^{-1/2} (u_x, u_y) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} ((1 + \|\nabla u\|^2)^{-1/2} u_x) + \frac{\partial}{\partial y} ((1 + \|\nabla u\|^2)^{-1/2} u_y) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} ((1 + \|\nabla u\|^2)^{-1/2} u_x) + ((1 + \|\nabla u\|^2)^{-1/2} u_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} ((1 + \|\nabla u\|^2)^{-1/2} u_y \\ &\quad + ((1 + \|\nabla u\|^2)^{-1/2} u_{yy} = \\ &= (1 + \|\nabla u\|^2)^{-3/2} (-u_x u_{xx} - u_y u_{yx}) u_x + (1 + \|\nabla u\|^2)^{-1/2} u_{xx} \\ &\quad + (1 + \|\nabla u\|^2)^{-3/2} (-u_x u_{xy} - u_y u_{yy}) u_y + (1 + \|\nabla u\|^2)^{-1/2} u_{yy} = \\ &= (1 + \|\nabla u\|^2)^{-3/2} [-u_x^2 u_{xx} - u_x u_y u_{yx} + (1 + \|\nabla u\|^2) u_{xx} \\ &\quad - u_x u_y u_{xy} - u_y^2 u_{yy} + (1 + \|\nabla u\|^2) u_{yy}] = \\ &= (1 + \|\nabla u\|^2)^{-3/2} [(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy}] \end{aligned}$$

de onde obtemos $(*)$ diretamente.

As equações $(*)$ e $(**)$ são formas distintas de descrever a curvatura média prescrita. Uma outra forma de apresentar esta equação é obtida observando

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

é o laplaciano da função u . Além disso, como hessiano de u é bilinear temos,

$$\begin{aligned} Hess(u)(\nabla u, \nabla u) &= \nabla^2 u(\nabla u, \nabla u) = \nabla^2 u((u_x, u_y), (u_x, u_y)) = \\ &= u_{xx}u_x^2 + u_{xy}u_yu_x + u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_y^2 = \\ &= u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_yu_x + u_{yy}u_y^2 \end{aligned}$$

daí

$$(1 + \|\nabla u\|^2)\Delta u - \nabla^2 u(\nabla u, \nabla u) = (1 + u_y^2)u_{xx} + (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_xu_yu_{xy}$$

portanto,

$$(*) (*) (*) \quad (1 + \|\nabla u\|^2)\Delta u - \nabla^2 u(\nabla u, \nabla u) = -2H(1 + \|\nabla u\|^2)^{3/2}$$

finalmente, observamos que a equação acima também pode ser escrita em linguagem matricial. De fato,

$$tr \left[\begin{pmatrix} 1 + u_y^2 & -u_xu_y \\ -u_xu_y & 1 + u_x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + u_y^2 & -u_xu_y \\ -u_xu_y & 1 + u_x^2 \end{pmatrix} \right] = 2H(1 + \|\nabla u\|^2)^{3/2}$$

4 Metodologia

Como é usual no caso da pesquisa em matemática, o trabalho é todo feito baseado no estudo individual e na realização de seminários. Ressaltamos que neste trabalho seguimos a linha de apresentação do autor Rafael López, descrita no livro Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary, publicado pela editora Springer em 2010.

5 Resultados

Os resultados apresentados são clássicos, porém não estão disponíveis em livros textos em português acessíveis a estudantes com nível de conhecimento de graduação. Como é usual no caso de matemática pura, por se tratar de um trabalho resultante de projeto de iniciação científica, não apresentamos resultados novos. As contribuições dadas são a disponibilização de um material sobre o tema que seja mais acessível aos estudantes de graduação em matemática e, principalmente, a contato do autor com a matemática aqui apresentada.

6 Conclusão

A partir dos estudos realizados foi possível perceber a importância da Iniciação Científica para o bolsista, por esta possibilitar o estudo de temas mais avançados e que provavelmente não seriam abordados durante a graduação. Pretendemos também produzir um texto que facilite o entendimento a cerca de tal conteúdo, podendo concluir ainda, através dos resultados, que aplicar a teoria de EDP elípticas para estudar a geometria de superfícies é uma ótima estratégia.

7 REFERÊNCIAS

- [1] López, R., “Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary”. Springer-Verlag. 2013.
- [2] De Lima, R. Freire, “Introdução à Geometria Diferencial”. *. 2016.

- [3] Boyce, William e DiPrima, Richard. “Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno”. LTC Editora (8a. edição). 2006.
- [4] Biezuner, R. Josué, “Notas de Aula: Equações Diferenciais Parciais I/II”. Notas de aula dos cursos Equações Diferenciais Parciais I e II do Programa de Pós-Graduação em Matemática, ministrado durante o ano de 2005. 2007.