

SOBRE SUPERFÍCIES UMBÍLICAS NO $\mathbb{R}^3$

*Cícero Alexandre do Nascimento*¹, *Flávio França Cruz*²

Resumo

Neste trabalho, vamos apresentar algumas propriedades das superfícies umbílicas do $\mathbb{R}^3$. Provaremos que as únicas superfícies regulares, conexas e orientadas que são totalmente umbílicas são (pedaços de) planos e esferas. Mostraremos ainda que toda superfície regular compacta possui pelo menos um ponto elíptico, concluindo assim que não existe superfície mínima compacta no $\mathbb{R}^3$.

Palavras-chave : Superfícies umbílica, Superfícies Mínimas, Geometria Diferencial.

ON UMBILICAL SURFACES IN $\mathbb{R}^3$

Abstract

In this work, we will present some properties of the umbilical surfaces of $\mathbb{R}^3$. We will prove that the only regular, connected and oriented surfaces that are totally umbilical are (pieces of) planes and spheres. We will also show that every regular compact surface has at least one elliptical point and then conclude that there is no compact minimal surface in $\mathbb{R}^3$.

Keywords: Surfaces umbilical, Minimal surface, Differential Geometry.

¹Licenciatura em Matemática/URCA-PIBIC/FUNCAP. e-mail: xandecicero@gmail.com

²Universidade Regional do Cariri/URCA. e-mail: flavio.franca@urca.br.

1 Preliminares

Inicialmente iremos apresentar algumas definições. Uma superfície regular do $\mathbb{R}^3$ é um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para cada $p \in S$ existe uma vizinhança V de p em S e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$, definida num aberto U do $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S$ tal que:

- 1) X é diferenciável. Isto significa que se escrevermos

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U$$

as funções $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .

- 2) X é um homeomorfismo, ou seja, além de X ser contínua, tem-se que X tem inversa $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que é contínua.
- 3) para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Uma superfície é dita compacta se ela for limitada e fechada. Uma propriedade importante desse tipo de superfície é que toda função contínua definida numa superfície compacta possui ponto de máximo e mínimo.

Iremos utilizar a noção de diferenciabilidade para funções definidas em superfície. Neste sentido, lembramos que uma função $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$, com S uma superfície regular, é diferenciável em $p \in V$ se dada uma parametrização $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ com $p \in X(U) \subseteq V$ tivermos que, $f \circ X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $X^{-1}(p) = q$. A regra da cadeia vale neste contexto. Precisamente, se S_1 e S_2 são superfícies regulares, $f : S_1 \rightarrow S_2$ e $g : S_2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ são diferenciáveis, então a composta $g \circ f$ é diferenciável e

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$$

A segunda forma fundamental de uma superfície S é dada por

$$II_p(w) = \langle -dN_p(w), w \rangle, w \in T_p S.$$

Como dN_p é autoadjunto, segue do Teorema Espectral que $-dN_p$ é diagonalizável, isto é, existem reais $\kappa_1 = \kappa_1(p) \leq \kappa_2 = \kappa_2(p)$ (os autovalores de $-dN_p$) e uma base ortonormal $\{w_1, w_2\}$ de $T_p S$, a qual é formada pelos autovetores associados a κ_1 e κ_2 , isto é, $-dN_p w_1 = \kappa_1 w_1$ e $-dN_p w_2 = \kappa_2 w_2$. Os autovalores κ_1 e κ_2 são chamados de curvaturas principais de S em p , enquanto as direções determinadas por w_1 e w_2 são chamados de direções principais de S em p . A curvatura gaussiana de S em p , $K(p)$, e a curvatura média de S em p , $H(p)$, são definidas por

$$K(p) = \kappa_1(p) \cdot \kappa_2(p)$$

e

$$H(p) = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}.$$

Diz-se que $p_0 \in S$ é um ponto elíptico da superfície S quando tivermos que $K(p_0) > 0$, ou seja, quando as curvaturas principais possuírem o mesmo sinal.

2 Introdução

O principal resultado que apresentaremos é o seguinte

Teorema 1 *Seja S uma superfície regular conexa, orientável. S é totalmente umbílica se, e somente se, está contida num plano ou numa esfera.*

Mostraremos ainda que toda superfície compacta possui pelo menos um ponto elíptico. Precisamente, provaremos o seguinte resultado.

Teorema 2 *Toda superfície compacta do $\mathbb{R}^3$ possui pelo menos um ponto elíptico.*

Uma consequência direta deste resultado é o seguinte:

Corolário 1 *Não existe superfície mínima compacta no $\mathbb{R}^3$.*

3 Objetivos

O objetivo deste trabalho é apresentar o conteúdo trabalhado durante os seminários de Geometria Diferencial ministrados pelo professor Flávio França Cruz, dando ênfase ao estudo de superfícies regulares totalmente umbílicas e a existência de pontos elípticos em superfícies compactas.

4 Metodologia

Utilizamos como metodologia, para elaboração deste trabalho, seminários para discussão dos conteúdos e pesquisas bibliográficas.

5 Resultados

Começaremos pela demonstração do Teorema 1. Primeiramente demonstraremos a ida. Seja $N : S \rightarrow S^2$ a aplicação normal de Gauss da superfície S . Definindo $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$ por $\lambda(p) = -\kappa_1(p) = -\kappa_2(p)$, $p \in S$, temos que $dN_p(v) = \lambda_p v$, $\forall v \in T_p S$, $\forall p \in S$.

Afirmção: λ é constante.

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização em torno de $p \in S$. Denotemos por $\phi := \lambda \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}$. Note que, derivando $N \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ em relação a u e v obtemos

$$(N \circ X)_u(u, v) = \phi(u, v)X_u(u, v) \quad (1)$$

$$(N \circ X)_v(u, v) = \phi(u, v)X_v(u, v). \quad (2)$$

Em particular, se tomarmos o produto interno com X_u e X_v em (1) e (2), respectivamente, obtemos

$$\phi(u, v) = \frac{\langle (N \circ X)_u(u, v), X_u(u, v) \rangle}{\langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle} = \frac{\langle (N \circ X)_u(u, v), X_v(u, v) \rangle}{\langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle}.$$

Segue da expressão acima que ϕ é diferenciável. Ora, como $\phi = \lambda \circ X$ concluímos que $\lambda = \phi \circ X^{-1}$ é diferenciável, onde X é uma parametrização qualquer. Agora derivamos (1) e (2) acima para obter

$$(N \circ X)_{uv}(u, v) = \phi_v(u, v)X_u(u, v) + \phi(u, v)X_{uv}(u, v) \quad (3)$$

e

$$(N \circ X)_{vu}(u, v) = \phi_u(u, v)X_v(u, v) + \phi(u, v)X_{vu}(u, v). \quad (4)$$

Pelo Lema de Schwarz

$$(N \circ X)_{uv} = (N \circ X)_{vu} \quad \text{e} \quad X_{uv} = X_{vu}.$$

Fazendo (3)-(4) obtemos

$$\phi_v(u, v)X_u(u, v) - \phi_u(u, v)X_v(u, v) = 0.$$

Ora, X_u e X_v são LI, logo

$$\phi_v(u, v) = -\phi_u(u, v) = 0.$$

Portanto ϕ é constante. Como $\lambda : \phi \circ X^{-1} : X(u) \rightarrow \mathbb{R}$. Concluímos, que λ é constante em $X(u)$. Portanto λ é localmente constante. Como S é conexa segue que λ é globalmente constante. Vamos considerar dois casos:

i) $\lambda = 0$, neste caso, $dN_p = 0$.

Logo N é constante e segue que S está contida num plano.

ii) $\lambda(p) = \lambda_0 \neq 0, \forall p \in S$.

Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $f(p) = p - \frac{1}{\lambda_0}N(p), \forall p \in S$. Temos que

$$df_p(v) = v - \frac{1}{\lambda_0}dN_p(v) = 0.$$

Logo f é constante. Seja $c \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(p) = c, \forall p \in S$, assim

$$p - \frac{1}{\lambda_0}N(p) = c, \text{ isso implica que, } \|p - c\| = \frac{1}{|\lambda_0|} \|N(p)\| = \frac{1}{|\lambda_0|}, \forall p \in S.$$

S está contida na esfera de centro c e raio $\frac{1}{|\lambda_0|}$. Agora a recíproca.

Planos : Seja Π um plano no $\mathbb{R}^3$ normal ao vetor unitário $w \in \mathbb{R}^3$ claramente $N(p) = w, \forall p \in \Pi$, define uma orientação em Π , em particular, $-dN_p = 0$. Portanto, $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = 0, \forall p \in \Pi$. Note que Π é totalmente umbílico.

Esfera: Seja $S = \{q \in \mathbb{R}^3 : \|p - q\| = r\}$ a esfera de centro p e raio $r > 0$. Note que $N(q) = -\frac{1}{r}(q - p)$ define uma orientação em S .

Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ com $\alpha(0) = q$ e $\alpha'(0) = v \in T_p S$. Assim

$$dN_q(v) = \frac{d}{dt}(N(\alpha(t)))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{r}(\alpha(t) - p)\right)|_{t=0} = -\frac{1}{r}\alpha'(0) = -\frac{1}{r}v.$$

Então $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = \frac{1}{r}$. Logo S é totalmente umbílica. Depois do primeiro resultado, apresentaremos a demonstração do Teorema 2.

Sejam S uma superfície regular compacta, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ a função $f(p) = \langle p, p \rangle$ e p_0 um ponto de máximo de f .

Considere um vetor unitário qualquer $w \in T_p S$ e uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ parametrizada pelo comprimento de arco com $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha'(0) = w$, com isso $(f \circ \alpha)' = \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle$. Como p_0 é ponto crítico, então

$$(f \circ \alpha)'_{s=0} = 2\langle \alpha'(0), \alpha(0) \rangle = 0 \therefore \langle w, p_0 \rangle = 0 \therefore T_{p_0} S = p_0^\perp$$

portanto $N = -\frac{p_0}{\|p_0\|}$ como p_0 é ponto de máximo, então

$$(f \circ \alpha)'' = 2\langle \alpha(s), \alpha''(s) \rangle + 2\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle$$

Segue que

$$(f \circ \alpha)''_{s=0} = 2\langle p_0, \alpha''(0) \rangle + 2\langle w, w \rangle \leq 0$$

Com isso temos

$$\langle p_0, \alpha''(0) \rangle \leq -1$$

multiplicando por $(\frac{-1}{\|p_0\|})$ em ambos os lados, obtemos

$$\langle \frac{-p_0}{\|p_0\|}, \alpha''(0) \rangle \geq \frac{1}{\|p_0\|}$$

Onde concluímos que

$$II_{p_0}(w) \geq \frac{1}{\|p_0\|}, w \in T_{p_0}, \|w\| = 1$$

Afirmção: p_0 é um ponto elíptico de S .

como $K_n(p_0) = \langle \alpha''(0), N \rangle \geq \frac{1}{\|p_0\|}$, então $\kappa_1(p_0)$ e $\kappa_2(p_0) \geq \frac{1}{\|p_0\|} > 0$, logo $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 > 0$. Portanto p_0 é ponto elíptico.

- Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima se $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = 0$, ou seja, as duas curvaturas principais são iguais em módulo e opostas no sinal em todo ponto da superfície. Assim todo ponto da superfície é ponto hiperbólico ou planar. Mas vimos que em um ponto elíptico as curvaturas principais tem o mesmo sinal, logo a curvatura média não pode se anular.

6 Conclusão

Depois do trabalho realizado, foi possível perceber que é de suma importância a iniciação científica, porque nela é abordado conteúdos avançados que não são trabalhados na graduação. É importante também enfatizar a experiência adquirida pelos alunos para a continuidade de sua carreira acadêmica.

7 REFERÊNCIAS

- [1] Lima, Ronaldo Freire, “ Introdução à Geometria Diferencial”. IV Colóquio de Matemática da Região Norte. SBM (RJ). 2016.
- [2] ALÍAS, Luis J. “ Análisis Geométrico y Geometria Global de Superficies: Una Introducción Elemental”. XIV Escola de Geometria Diferencial. IMPA (RJ). 2006.
- [3] LÓPEZ, Rafael. “ Constant Mean Curvature Surface with Boundary”. Springer-Verlag, 2013.