



NÚMEROS IRRACIONAIS E TRIGONOMETRIA

Damião Jeferson de Araújo Souza¹

Iza Silva Campos²

João Paulo de Araújo Souza³

Renan Fernandes de Moraes⁴

Valdinês Leite de Sousa Júnior⁵

RESUMO

Este trabalho é proposto como uma continuidade ao texto de título “Identificando Alguns Números Irracionais” que também foi proposto na VIII SEMATUDCS. Retornaremos aos números irracionais com o intuito de apresentar algumas relações entre a Geometria Euclidiana Plana, em especial a Trigonometria, e tais números. Retorna ao Teorema das Raízes Racionais com a justificativa da irracionalidade de $\cos(20^\circ)$ e apresenta um teorema importante que relaciona a irracionalidade de um cosseno do arco duplo com a irracionalidade do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo. Com a junção desses dois resultados, é possível justificar a irracionalidade de uma quantidade infinita de valores dessas três funções trigonométricas básicas. Vale citar que em nenhum momento do texto apresentamos o valor de qualquer número irracional, mas isso nada influencia na determinação do tipo de cada número, pois a proposta é apresentar resultados gerais e não casos particulares. Para tal apresentação é utilizada uma metodologia de pesquisa dita bibliográfica.

Palavras-chave: Números Irracionais. Trigonometria. Características dos números.

1. Introdução

A teoria dos números irracionais é bem ampla e está relacionada com diversas áreas da matemática. Com isso em mente, este trabalho busca apresentar uma continuação às propriedades apresentadas no texto de título “Identificando Alguns Números Irracionais” que também foi proposto na VIII SEMATUDCS.

Para isso, buscamos relacionar os números irracionais com alguns resultados da Geometria Euclidiana Plana, em especial a Trigonometria. O leitor poderá identificar que resultados fortes podem ser apresentados de forma simples. Além disso, alguns resultados possuem um fácil entendimento, onde podemos encontrar relações entre conteúdos que aparentemente são bem distintos e desconexos.

Neste texto, retornaremos inicialmente aos números racionais e sua propriedade do fechamento para as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão). Além disso, utilizaremos o Teorema das Raízes Racionais para polinômios com coeficientes inteiros.

¹SEDUC - Crato, e-mail: damiaojefferson22@gmail.com

²UNICENTER, e-mail: izacampos2013@gmail.com

³Instituto Federal da Paraíba, e-mail: paulo.souza@ifpb.edu.br

⁴Instituto Federal do Sertão Pernambucano, e-mail: renan.fernandes@ifsertao-pe.edu.br

⁵Universidade Federal do Cariri, e-mail: valdines.leite@ufca.edu.br

Quanto aos números irracionais, enunciaremos uma propriedade semelhante à do fechamento para números racionais, mas agora os números que serão operados devem ser um racional e um irracional. É justificada a irracionalidade de $\cos(20^\circ)$ e é demonstrada uma relação entre a irracionalidade de algumas imagens da função $\cos(2x)$ e as irracionalidades das respectivas imagens dadas pelas funções trigonométricas $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x$.

Para alcançar tal objetivo, fizemos uso de uma metodologia de pesquisa dita bibliográfica e explicativa, pois realizamos pesquisas em alguns materiais, como livros, artigos e monografias, e tentamos apresentar os resultados obtidos de uma maneira simples e concisa.

2. Objetivos

Apresentar algumas propriedades do conjunto dos números irracionais, buscando identificar alguns elementos desse conjunto que estão relacionados com alguns resultados embasados nas propriedades da Geometria Euclidiana, em especial na Trigonometria.

3. Metodologia

Este texto foi idealizado a partir de pesquisa bibliográfica. O professor Severino afirma em (SEVERINO, 2013) que essa categoria de pesquisa caracteriza-se a partir do registro disponível, que decorre de pesquisas já realizadas, em livros, artigos, monografias, dissertações e teses, dentre outros arquivos. Assim, os textos tornam-se fontes dos temas que serão trabalhados e pesquisados. Teve-se como base algumas propriedades dos números irracionais consideradas em (AVILA, 2006), (NIVEN, 1990) e (KAPLAN, 1972), para apresentar métodos que determinam a irracionalidade de certos números reais. Além disso, como deseja-se apresentar e analisar as ideias por trás de cada princípio apresentado, temos uma pesquisa explicativa que segundo o professor Severino:

“A pesquisa explicativa é aquela que, além de registrar e analisar os fenômenos estudados, busca identificar suas causas, seja através da aplicação do método experimental/matemático, seja através da interpretação possibilitada pelos métodos qualitativos. (SEVERINO, 2013, p. 107)”.

Para as propriedades trigonométricas, foi utilizado como referência o livro (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) que pode ser consultado para maiores esclarecimentos sobre tal conteúdo.

4. Resultados

Para começar, consideraremos que o conjunto dos números naturais não contém o número zero. Além disso, deve-se ter em mente a definição do conjunto dos números racionais, representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$, sendo ele um conjunto fechado para as quatro operações básicas. Também faremos uso de algumas propriedades relativas às funções trigonométricas básicas, que não enunciaremos previamente.

Definição 1. *O conjunto dos números racionais (ou dos quocientes) é dado por*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Quando operamos dois números racionais por qualquer uma das quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) obtemos como resultado um número racional. Pois,

dados $m, n \in \mathbb{Q}$ temos que existem $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{N}$, tais que $m = a/b$ e $n = c/d$. Teremos que, $b \cdot d \neq 0$ e

$$m \pm n = \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad \pm bc}{bd} \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad m \cdot n = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}.$$

Se tivermos $n \neq 0$, então devemos ter $b \cdot c \neq 0$. Com isso,

$$\frac{m}{n} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \in \mathbb{Q}.$$

Tendo em mente o teorema das raízes racionais de um polinômio de coeficientes inteiros e a relação

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

apresentaremos nosso primeiro exemplo.

Exemplo 1. *Sem precisar determinar o valor de $\cos(20^\circ)$, podemos afirmar que tal número é irracional. Com efeito, tomando $\cos(20^\circ) = x$, temos que $\cos(3x) = 1/2$ e, assim,*

$$\cos(3 \cdot 20^\circ) = 4 \cos^3(20^\circ) - 3 \cos(20^\circ) \Rightarrow \frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \Rightarrow 8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Ou seja, se $x = \cos 20^\circ$ é racional, então a equação $8x^3 - 6x - 1 = 0$ tem uma raiz racional. Por outro lado, pela o teorema das raízes racionais, as possíveis raízes racionais da equação são $\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$ e $\pm 1/8$. Com um teste simples (por substituição), temos que nenhuma dessas possibilidades é raiz da equação dada. Portanto, a raiz $x = \cos 20^\circ$ de $8x^3 - 6x - 1 = 0$ não pode ser racional.

Proposição 1. *Sejam m um número irracional e q um número racional. Então, $q \pm m, q \cdot m$ e $1/m$ são números irracionais.*

A proposição acima afirma que quando operamos um número racional com um número irracional, pelas quatro operações básicas, temos um número irracional, onde a divisão é simplesmente a multiplicação de um número pelo inverso de outro.

Deixamos a demonstração da Proposição 1 omitida, para que o leitor interessado possa demonstrá-la por conta própria, deixando aqui a sugestão de utilizar a técnica de demonstração por redução ao absurdo.

Teorema 1. *Se $\cos 2x$ é um número irracional, então $\cos x$, $\sin x$ e $\tan x$ são números irracionais.*

Demonstração. Assumindo a irracionalidade de $\cos 2x$, iremos dividir a demonstração em três partes.

- (i) se fosse $\cos x$ um número racional, teríamos que $\cos^2 x$ seria um número racional e, por consequência, $\cos(2x) = \cos^2 x - 1$ também seria um número racional, o que contradiz a hipótese. Portanto, a única possibilidade é que $\cos x$ seja um número irracional.
- (ii) se fosse $\sin x$ um número racional, teríamos que $\sin^2 x$ seria um número racional e, por consequência, $\cos^2 x$ seria irracional. De modo análogo ao que foi apresentado no item (i), $\cos(2x)$ seria um número racional e isso contradiz a hipótese. Portanto, $\sin x$ é um número irracional.

(iii) se fosse $\tan x$ um número racional, teríamos que $\tan^2 x$ seria um número racional e, assim, $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ seria um número racional. Por outro lado, como

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

teríamos que $\cos^2 x$ seria um número racional, e isso implicaria que $\cos 2x$ é um número racional, contrariando a hipótese. Por fim, nos resta que $\tan x$ também deve ser um número irracional. ■

O Teorema 1, junto ao fato de sabermos que $\cos(20^\circ)$ ser um número irracional, nos dá uma infinidade de números irracionais que são imagem das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente. Por exemplo, sabemos que $\cos(20^\circ) = \cos(2 \cdot 10^\circ)$ é um número irracional, então, pelo Teorema 1, temos que $\cos(10^\circ)$, $\sin(10^\circ)$ e $\tan(10^\circ)$ são todos números irracionais. Em particular, obtemos que $\cos(10^\circ)$ é um número irracional, e poderíamos seguir nesse raciocínio para mostrar que $\cos x_n$ é irracional sempre que x_n for dado pela recorrência

$$\begin{cases} x_1 = 20^\circ; \\ x_n = \frac{x_{n-1}}{2}, \forall n > 1. \end{cases}$$

Por fim, apresentamos um resultado que envolve Trigonometria, Geometria Plano e números racionais (uma forma de atingir os números irracionais de maneira indireta).

Teorema 2. *O cosseno de qualquer ângulo interno de um triângulo, cujos lados têm como medida um número racional, não pode ser um número irracional.*

Demonstração. Assumindo o triângulo ABC , de lado medido $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ e ângulos internos cujas medidas são $\hat{A}BC = \hat{B}$, $\hat{AC}B = \hat{C}$ e $\hat{B}AC = \hat{A}$ temos que, por hipótese, a , b e c são números racionais. Pela Lei dos Cossenos, temos que

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{e} \quad \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Como as expressões de $\cos \hat{A}$, $\cos \hat{B}$ e $\cos \hat{C}$ são compostas apenas por operações básicas (e elevar ao quadrado pode ser visto como uma multiplicação) de números racionais, o resultado não pode ser um número irracional, uma vez que o conjunto dos números racionais é fechado para as quatro operações básicas. ■

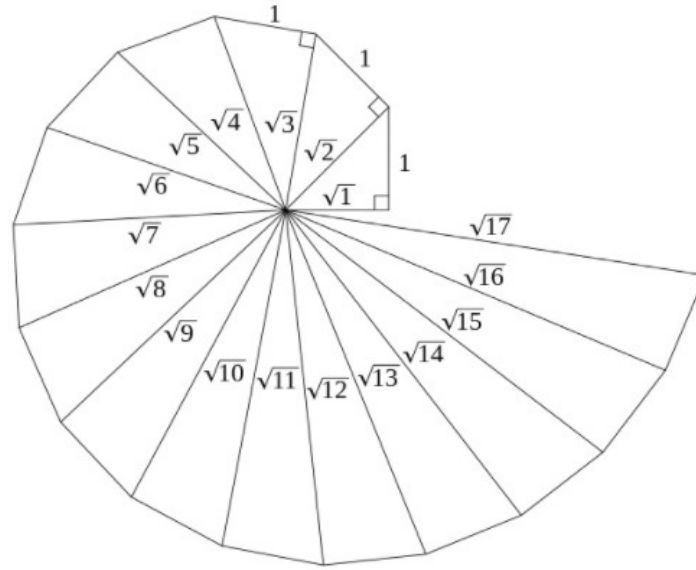
A título de curiosidade, exemplificação e aplicação, apresentamos a Espiral de Teodoro, que apresenta a construção geométrica das raízes quadradas de qualquer número natural. A construção dessa espiral consiste em considerar sucessivos triângulos retângulos cujos catetos medem uma unidade de medida e o outro coincide com a hipotenusa do triângulo retângulo anterior. Por exemplo, o primeiro tem lados medindo 1 uc, 1 uc e $\sqrt{2}$ uc. Os catetos do segundo mediram 1 uc e $\sqrt{2}$, com isso, a hipotenusa medirá

$$h_2 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3},$$

e assim sucessivamente.

Sabemos que a raiz quadrada de qualquer número primo é um número irracional, mais ainda pode ser provado quanto a irracionalidade de qualquer número que não seja um quadrado perfeito. Assim, tirando os números $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ e $\sqrt{16}$, todos os outros números apresentados na espiral da Figura 1 são números irracionais.

Figura 1: Espiral de Teodoro



Fonte: (WIKIPEDIA, 2021)

Caso deseje utilizar essa espiral em uma aula utilizando o programa GeoGebra, pode-se acessar o site (GONÇALVES, 2021), onde encontraram uma construção animada pronta. Podendo fazer a animação no site ou diversificar a construção a partir do arquivo .ggb que o autor disponibiliza no site supracitado.

5. Considerações Finais

No início do trabalho, propusemo-nos a justificar a irracionalidade de $\cos(20^\circ)$ mostrando que tal número é raiz de uma equação polinomial que, pelo Teorema das Raízes Racionais, não possui raízes racionais, o que acarreta o resultado desejado. Além disso, tal irracionalidade foi crucial para garantir a irracionalidade de uma infinidade de valores obtidos por meio das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, mas, para isso, fez-se necessário um teorema que relacionou, quanto a irracionalidade, tais funções com o cosseno do arco duplo.

Como exemplo de uma aplicação mais direta e visual, apresentamos a Espiral de Teodoro, que consiste na construção da raiz quadrada de qualquer número inteiro que se deseje. É verdade que para números “grandes” não é tão eficaz, mas para uma breve apresentação serve adequadamente.

A importância dos números irracionais poderia ser considerada pela densidade desses elementos na matemática em geral, mas, nesses dois textos⁶, tentamos mostrar aos leitores que esses números são interessantes e, a partir de propriedades elementares, podemos chegar a resultados gerais sobre toda uma classe de números.

Como proposta de pesquisa, sugere-se a demonstração de que os números e (constante de Euler) e π (razão entre o comprimento de um círculo e seu diâmetro) são irracionais. Além disso, recomendamos um estudo que aborda a divisão dos números reais como números algébricos e números transcendentos. Como principais referências, indicamos os livros (FIGUEIREDO, 2011) e (NIVEN, 1990), onde serão encontrados fortes resultados sobre essa teoria, podendo qualquer uma das duas sugestões ser uma continuação dessa pesquisa.

⁶“Identificando Alguns Números Irracionais” e “Números Irracionais e Trigonometria”

Referências

- AVILA, G. S. de S. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3a. ed. São Paulo: Blucher, 2006.
- CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria e Números Complexos**. 3a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- FIGUEIREDO, D. G. de. **Números Irracionais e Transcendentes**. 3a. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011.
- GONÇALVES, W. V. **Espiral Pitagórica**. [⟨https://www.geogebra.org/m/rduacrtg⟩](https://www.geogebra.org/m/rduacrtg). Acessado em 03 de dez. de 2021. 2021.
- KAPLAN, W. **Cálculo Avançado**. Traduzido por Frederic Tsu. 1a. ed. São Paulo: Blucher, 1972.
- NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais**. Traduzido por Renate Watanabe. 3a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1990.
- SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico [livro eletrônico]**. 1a. ed. São Paulo: Cortez, 2013.
- WIKIPEDIA. **Espiral de Teodoro**. [⟨https://pt.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Teodoro⟩](https://pt.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Teodoro). Acessado em 03 de dez. de 2021. 2021.