



VIII SEMATUDCS

SEMANA DE MATEMÁTICA DA URCA/UD
CAMPOS SALES - 2021

UM ESTUDO SOBRE OS NÚMEROS RACIONAIS COMO SUPORTE TEÓRICO PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Nayara Alves da Silva¹

Ozana da Silva Alencar²

RESUMO: No ensino dos números racionais ainda predomina o tradicionalismo caracterizado por um processo de memorização que acarreta a não desenvoltura e a falta de autonomia dos alunos. Enquanto limitados ao livro didático, material esse produzido de acordo com o nível de escolaridade do discente, e não do docente, muitos professores não têm embasamento teórico suficiente para conduzir o aluno ao entendimento pleno do que está a estudar. Nessa circunstância, dando continuidade ao projeto “Obstáculos didáticos e erros no processo de ensino aprendizagem de números racionais” objetivamos, através da revisão bibliográfica, desenvolver mais um material que sirva de fundamento teórico para professores de Matemática da Educação Básica voltado para o ensino dos Números Racionais, incentivando-os a ir além do livro didático. Em uma linguagem de fácil entendimento, apresentaremos a definição formal dos números racionais e discutiremos algumas sutilezas da mesma. Desejamos que este trabalho contribua para o aprimoramento da prática docente do professor de matemática ao ensinar sobre os números racionais.

Palavras-chave: Números racionais. Ensino-aprendizagem. Professor de matemática. Frações. Definição.

1. Introdução

O presente trabalho é parte do desenvolvimento do projeto “Obstáculos didáticos e erros no processo de ensino aprendizagem de números racionais”. Segundo Nascimento (2008), “*as definições sobre os diversos tipos de frações, além de não fazerem sentido para o aluno, trazem conceitos abstratos e de difícil compreensão*”. Por se limitar ao livro didático, muitos professores não têm embasamento teórico suficiente para conduzir o aluno ao entendimento pleno do que está a estudar.

O professor precisa ter domínio da fundamentação teórica do que leciona, para que não venha “*somente a conduzir o aluno à memorização de fórmulas e procedimentos para resolução de exercícios, sujeitando o mesmo a uma aprendizagem mecânica*” (FREITAS e MIGUEL, 2017). Nesse sentido, “*o professor precisa se aperfeiçoar e se adaptar [...], mesmo*

¹ Universidade Regional do Cariri, e-mail: nayara.alves@urca.br

² Universidade Regional do Cariri, e-mail: ozana.alencar@urca.br



VIII SEMATUDCS

SEMANA DE MATEMÁTICA DA URCA/UD
CAMPOS SALES - 2021

sabendo que ainda no ambiente de sala de aula predominam métodos tradicionais” (GOMES, FÉLIX e SILVA, 2018). É evidente que os professores que estão acostumados com a mesma rotina escolar acabam tendo dificuldades em se habituar a mudanças, entretanto é necessário se apropriar de novos conhecimentos e metodologias de ensino, deixando de lado os métodos essencialmente tradicionais.

Em uma linguagem de fácil entendimento, apresentaremos a definição formal do conjunto dos números racionais e discutiremos algumas sutilezas da mesma. Mais precisamente, veremos que é incorreto definir o conjunto dos números racionais como sendo o conjunto de todas as frações e que é também incorreto defini-lo como sendo, simplesmente, o conjunto das expressões a/b com a e b inteiros e b não nulo. É preciso, para obter a independência dos representantes, que consideremos as classes de todas as frações equivalentes. Veremos que dada uma fração ela pode ou não representar um número racional, que o número $\sqrt{2}$ não é racional e ainda falaremos sobre representações decimais finitas e infinitas.

2. Objetivos

Objetivamos tecer comentários acerca da definição dos números racionais e assim produzir um material de apoio para os professores de matemática da Educação Básica, incentivando-os a ir além dos livros didáticos.

3. Metodologia

A abordagem metodológica compreende a revisão bibliográfica da obra de NIVEN (1984).

4. Resultados

Definição do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais

Quando cogitamos acerca dos números racionais e das frações esses termos podem por vezes ser confundidos. Muitos professores dizem que o conjunto dos números racionais é o conjunto de todas as frações. Isso é um grande equívoco, pois o termo “fração” por si só,



VIII SEMATUDCS

SEMANA DE MATEMÁTICA DA URCA/UD
CAMPOS SALES - 2021

remete a qualquer expressão algébrica dada por um numerador e um denominador. Por exemplo,

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{2}, \frac{23}{y}, \frac{y^2 - x^3}{x^2},$$

são frações, e, entretanto, como ficará claro adiante, não são necessariamente números racionais.

Definição 1 (frações equivalentes): Sejam a, b, A e B números inteiros com b e B não nulos. Dizemos que $\frac{a}{b}$ e $\frac{A}{B}$ são *frações equivalentes* se, e somente se, $aB = Ab$. Isto é,

$$\frac{A}{B} \equiv \frac{a}{b} \Leftrightarrow aB = Ab.$$

Dada a definição acima note que, se definirmos um número racional como sendo simplesmente uma expressão da forma a/d , onde a e d são ambos os números inteiros e $d \neq 0$, essa ainda não é uma boa definição, pois depende da escolha dos representantes. Por exemplo, $\frac{2}{3}$ é equivalente às frações $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \dots$, as quais são dadas por representantes distintos dos representantes 2 e 3 dados inicialmente. Assim, esses números racionais são, a priori, diferentes, mas ao fim, representam a mesma quantidade. Não é interessante que isso aconteça, ou seja, precisamos de uma definição que independa da escolha dos representantes.

Definição 2 (número racional): Um *número racional* $r = \frac{a}{b}$ é a classe de todas as frações equivalentes a $\frac{a}{b}$. Assim, dois números racionais são iguais se suas classes são iguais como conjuntos. O conjunto de todos os números racionais é denotado por Q .

Tendo definido o conjunto dos números racionais, surge outra questão: como saber se expressões dadas por frações, como por exemplo,

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \text{ e } \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

são números racionais? Na prática, essa resposta se dá por meio de manipulações aritméticas.

Para o caso $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ podemos notar que

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1}.$$



VIII SEMATUDCS

SEMANA DE MATEMÁTICA DA URCA/UD
CAMPOS SALES - 2021

Logo, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ é um número racional, pois por meio de manipulações aritméticas, este se encaixa na Definição 2, sendo $a = 2$ e $b = 1$. Isso é de certa forma surpreendente, pois a priori, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ não parecia, segundo a Definição 2, ser um número racional, uma vez que seu numerador e denominador não são números inteiros. Já no caso da fração $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$, temos

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

resultando $\sqrt{2}$ que, como veremos a seguir, não é racional. Logo, a fração $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ não é um número racional. Por isso, cabe aqui enfatizarmos mais uma vez que é incorreto dizer que $\mathbb{Q}$ é simplesmente o conjunto de todas as frações.

Proposição 1: O número $\sqrt{2}$ não é racional.

Prova: Afirmação 1: Um número é par, se e somente se, o seu quadrado é par. Com efeito, sabemos que o conjunto dos números pares e também o conjunto dos números ímpares são ambos fechados para a multiplicação, em particular, o quadrado de um inteiro par é par e o quadrado de um inteiro ímpar é ímpar. Assim concluímos que um número é par, se e somente se o seu quadrado é par. Agora suponhamos, que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Desta forma, podemos escrever, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$. Suponhamos ainda que $\frac{a}{b}$ seja uma fração irredutível, isto é, que a e b sejam primos entre si. Isso garante que a e b não são ambos pares. Elevando ao quadrado a equação $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, obtemos $2 = \frac{a^2}{b^2}$, donde, $a^2 = 2b^2$. O termo $2b^2$ representa um inteiro par. Logo, a^2 é par, e portanto, (pela Afirmação 1) a é par, digamos $a = 2c$, onde c também é um inteiro. Substituindo a por $2c$ na equação $a^2 = 2b^2$, obtemos

$$(2c)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4c^2 = 2b^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2.$$

O termo $2c^2$ representa um inteiro par, de modo que b^2 é par e, portanto, (pela Afirmação 1) b é par. Mas isso é uma contradição, pois conforme visto acima, a e b não são ambos pares. Portanto, $\sqrt{2}$ não é um número racional.



VIII SEMATUDCS

SEMANA DE MATEMÁTICA DA URCA/UD
CAMPOS SALES - 2021

Representações decimais finitas e infinitas.

Existe uma forma alternativa de representar um número racional, a representação decimal. Por exemplo, os números decimais 0,5, 0,4 e 0,0125 representam, respectivamente as frações

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \text{ e } \frac{1}{80}.$$

Essas são as chamadas representações finitas. É perceptível, nos exemplos acima, como é bem simples relacionar uma fração a um número decimal que a represente. Entretanto existem outros números racionais que têm uma representação decimal infinita, isto é, apresentam infinitas casas decimais após a vírgula, com repetições de alguns algarismos, como por exemplo,

$$\frac{1}{3} = 0,33333 \dots; \frac{1}{6} = 0,16666 \dots; \frac{5}{11} = 0,454545 \dots$$

A partir desses exemplos surge uma pergunta natural: quais os números racionais que têm representação decimal finita? A resposta a essa pergunta é dada na obra que serviu de embasamento para esse trabalho, através do resultado a seguir.

Proposição 2: Um número racional, na forma irredutível $\frac{a}{b}$ tem uma representação decimal finita se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5.

5. Considerações Finais

O ensino dos números racionais ainda conta com algumas falhas decorrentes da falta de conhecimento por parte dos docentes no que diz respeito à fundamentação teórica deste assunto. Algumas dessas falhas estão relacionadas à própria definição desse conjunto e à classificação dos seus elementos. Desejamos que este trabalho contribua para o aprimoramento da prática docente do professor de matemática ao ensinar sobre os números racionais.

Reforçamos que os professores não devem se limitar ao livro didático, mas devem buscar outras fontes, que de preferência tenham sido criadas especialmente para eles, que se debrucem sobre elas, cresçam em conhecimento e que esse saber reflita diretamente na sua prática docente através da autonomia e propriedade para tratar do assunto que leciona.



VIII SEMATUDCS

SEMANA DE MATEMÁTICA DA URCA/UD
CAMPOS SALES - 2021

Referências

FREITAS, S. L.; MIGUEL, J. C. **Metodologias utilizadas para o ensino da matemática em uma escola do município de Cacoal- Rondônia:** um estudo analítico. 2017, UNESP.

GOMES, V. K. I.; FELIX, I. A.; SILVA, C. B. S. F. **O uso de objetos de aprendizagem no ensino das frações.** V CONEDU, 2018.

NASCIMENTO, J. do. Perspectivas para a aprendizagem e ensino dos números racionais. **Revista de iniciação científica da FFC**, v. 8, n. 2, p. 196 – 208, 2008.

NIVEN, I. **Números:** racionais e irracionais. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.