



IDENTIFICANDO ALGUNS NÚMEROS IRRACIONAIS

Damião Jeferson de Araújo Souza¹

Iza Silva Campos²

João Paulo de Araújo Souza³

Renan Fernandes de Moraes⁴

Valdinês Leite de Sousa Júnior⁵

RESUMO

Descobertos pelos gregos da Antiguidade, foi somente no século XIX que os números irracionais foram devidamente compreendidos e rigorosamente definidos, e ainda hoje nem todos os seus mistérios foram revelados. Os números irracionais foram surpreendentemente difíceis de definir. Uma definição, que a priori parece simples, mas que através da História, provou-se que esses números têm uma jornada intrigante, iniciada desde a famosa prova de Euclides de que a raiz quadrada de 2 é irracional. Foi demonstrado que o lado e a diagonal de um quadrado não podem ser medidos simultaneamente pela mesma unidade ou, dito de outra forma, que a diagonal é incomensurável com qualquer unidade que meça o lado. Ainda hoje, a identificação de tais números nem sempre é óbvia, diante disso, este trabalho visa apresentar critérios para a identificação de alguns números irracionais. Será feita uma síntese sobre os principais subconjuntos dos números reais até chegar ao conjunto dos números irracionais, onde buscaremos desvendar algumas propriedades desses números, mostrando formas de como reconhecê-los.

Palavras-chave: Números Irracionais. Aritmética. Características dos números.

1. Introdução

Os pitagóricos tiveram grande influência na história da Matemática. Eles tinham como lema que os números governavam o mundo e diziam que tudo poderia ser medido por meio de números racionais, mas quando apareceram medidas que não poderiam ser chamadas de racionais os pitagóricos, segundo o escritor Leonard em (MLODINOW, 2010, p. 37), intitularam tais medidas de *alogon*, “não racionais”, que hoje chamamos de “irracionais”. Por sua vez, a palavra *alogon* tinha um duplo sentido, que também significava “não deve ser falado”.

A evidência destas grandezas, ditas incomensuráveis, é o aporte matemático mais importante atribuído aos pitagóricos. Cajori (2007) afirma que eles provaram que a razão entre o lado e a diagonal de um quadrado não pode ser a razão de quaisquer dois números inteiros, sendo chamados segmentos dessa espécie de incomensuráveis e de irracional a razão desses segmentos.

¹SEDUC - Crato, e-mail: damiaojeferson22@gmail.com

²UNICENTER, e-mail: izacampos2013@gmail.com

³Instituto Federal da Paraíba, e-mail: paulo.souza@ifpb.edu.br

⁴Instituto Federal do Sertão Pernambucano, e-mail: renan.fernandes@ifsertao-pe.edu.br

⁵Universidade Federal do Cariri, e-mail: valdines.leite@ufca.edu.br

O conjunto dos números irracionais é bem intrigante, inicialmente por serem definidos a partir da diferença entre dois conjuntos que possuem uma quantidade infinita de elementos, retirando os números racionais dos números reais, e o que “sobra” são os números irracionais. Esta sobra, contém uma quantidade infinita de elementos, ainda maior do que a dos números racionais. Além disso, os irracionais estão presentes no cotidiano em diversas situações, mais do que se possa imaginar. Esse conjunto numérico não tem como ser ignorado, fazendo-se necessário a compreensão e entendimento de suas propriedades.

Neste trabalho, por meio de uma pesquisa bibliográfica explicativa, apresenta-se algumas das propriedades do conjunto dos números irracionais, além de critérios para a identificação de alguns de alguns de seus elementos.

2. Objetivos

Apresentar algumas propriedades do conjunto dos números irracionais, buscando identificar alguns elementos desse conjunto.

3. Metodologia

Este texto foi construído a partir de pesquisa bibliográfica. O professor Severino afirma em (SEVERINO, 2013) que essa categoria de pesquisa caracteriza-se a partir do registro disponível, que decorre de pesquisas já realizadas, em livros, artigos, monografias, dissertações e teses, dentre outros arquivos. Assim, os textos tornam-se fontes dos temas que serão trabalhados e pesquisados. Teve-se como base algumas propriedades dos números irracionais consideradas em (AVILA, 2006), (NIVEN, 1990) e (FIGUEIREDO, 2011), para apresentar métodos que determinam a irracionalidade de certos números reais. Além disso, como deseja-se apresentar e analisar as ideias por trás de cada princípio apresentado, temos uma pesquisa explicativa que segundo o professor Severino:

“A pesquisa explicativa é aquela que, além de registrar e analisar os fenômenos estudados, busca identificar suas causas, seja através da aplicação do método experimental/matemático, seja através da interpretação possibilitada pelos métodos qualitativos. (SEVERINO, 2013, p. 107)”.

4. Resultados

A humanidade inventou os números a partir de alguma necessidade específica. Reza a lenda que os números naturais surgiram primeiro para que pudéssemos contar objetos, sendo atualmente representados pelo símbolo

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Segundo o professor Geraldo Ávila (em (AVILA, 2006, p. 23)): “Esses números chamam-se ‘naturais’ justamente por surgirem ‘naturalmente’ em nossa experiência com o mundo físico, já nos primeiros anos da infância. Deste ponto de vista, ‘zero’ está longe de ser natural. Aliás, levou muito tempo para os matemáticos concederem ao zero o ‘status’ de número”.

Orientados pela necessidade de contabilizar quantidades por símbolos, os números inteiros surgem para representar a ausência (o zero) ou a falta de algo (os números negativos), sendo constituído pelos números naturais, seus simétricos e o zero. Ou seja, o conjunto dos números inteiros é representado por

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Em posse dos números naturais, podemos operar com a soma ou com a multiplicação e obter um resultado do mesmo tipo (fechado para a soma/multiplicação), mas não com a subtração. Já quanto aos números inteiros, temos um conjunto fechado para a soma, para a multiplicação e para a subtração, mas não para a divisão. Surgindo assim a necessidade de um outro conjunto que englobe todas as divisões possíveis de números inteiros por um natural. A saber, o conjunto dos números racionais (ou dos quocientes) é dado por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Aqui seguimos buscando sobre o fechamento do conjunto quanto às operações básicas. Dados $m, n \in \mathbb{Q}$ temos que existem $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{N}$, tais que $m = a/b$ e $n = c/d$. Além disso, $b \cdot d \neq 0$ e

$$m \pm n = \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad \pm bc}{bd} \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad m \cdot n = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}.$$

Se tivermos $n \neq 0$, então devemos ter $b \cdot c \neq 0$. Com isso,

$$\frac{m}{n} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \in \mathbb{Q}.$$

Tal análise poderia aparentar que estaria completa a nossa busca pelos conjuntos dos números, mas como perceberam os pitagóricos, que defendiam que os números racionais eram suficientes para resolver qualquer problema do dia a dia, a medida da diagonal de um quadrado, cujo lado mede uma unidade de comprimento (uc), não pode ser um número racional. De fato, pelo Teorema de Pitágoras, temos que se a medida da diagonal é d uc e se os lados medem 1 uc, então teríamos

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2} \text{ uc}.$$

Assim, a afirmação do pitagórico é equivalente a dizer que $\sqrt{2}$ não é um número racional ou ao que aparece no teorema que segue.

Teorema 1. *Não existe um número racional cujo quadrado seja igual a 2.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existam $p, q \in \mathbb{Q}$, tais que $(p/q)^2 = 2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, existem $2, p_2, p_3, \dots, p_n$ números primos distintos e $r_1, r_2, \dots, r_n, s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tais que

$$p = \pm 2^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_n} \text{ e } q = 2^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_n^{s_n},$$

com essa decomposição sendo única a menos da ordem de seus fatores. Assim

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2^{2r_1} p_2^{2r_2} \cdots p_n^{2r_n} = 2^{2s_1+1} p_2^{2s_2} \cdots p_n^{2s_n}.$$

Como o número $2r_1$ é par e o número $2s_1 + 1$ é ímpar, não podem ser iguais. Contradizendo a unicidade da decomposição de um número inteiro. Portanto, não existe tal número racional cujo quadrado seja igual a dois. ■

Com o que foi apresentado, e conhecendo o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), pode-se constatar que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, mas não se tem $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ou seja $\sqrt{2} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. A esse conjunto, que contém o $\sqrt{2}$, chamamos de conjuntos dos números irracionais e representamos por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Diferente do que acontece com os números racionais, não podemos afirmar que a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão de números irracionais também sejam números irracionais.

Pois, de modo análogo ao que aconteceu com a $\sqrt{2}$, pode-se mostrar que $-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Com isso, $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q} \text{ e } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \in \mathbb{Q}. \quad (1)$$

Para provar a validade de uma proposição, é necessário uma demonstração matemática. Por outro lado, para mostrar a não validade, basta apresentar um contraexemplo e foi isso que fizemos.

Agora, de maneira análoga ao que foi feito para mostrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$, pode-se mostrar que $\sqrt{6}$ e $\sqrt{3}$ também são irracionais. Com isso, podemos apresentar um outro exemplo de número irracional, que é soma de dois números irracionais.

Exemplo 1. O número $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional. De fato, se r fosse um número racional, teríamos que r^2 também o seria. Com isso,

$$\mathbb{Q} \ni r^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Logo, teríamos $\sqrt{6} = (r^2 - 5)/2 \in \mathbb{Q}$, pois, por hipótese, $r^2 \in \mathbb{Q}$ e assim $2, r^2 - 5 \in \mathbb{Q}$ e, como a divisão de dois números racionais é um número racional (desde que o denominador seja diferente de zero, que é o caso), chegaríamos ao absurdo de $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, que sabemos não ser verdade. Assim, a única possibilidade é que se tenha $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

Desse modo, podemos concluir que a soma de dois números irracionais podem ser ou não um número irracional.

O resultado obtido no exemplo pode ser generalizado pelo teorema a seguir. Vejamos.

Teorema 2. Sejam x, y números irracionais, tais que $x^2 - y^2$ é um número racional não-nulo. Então, $x + y$ e $x - y$ são ambos irracionais.

Demonstração. Devemos ter em mente que $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ e que a soma, a subtração e a divisão de dois números racionais são números racionais. Supondo, por absurdo, que $x + y$ seja um número racional, então $x - y = (x^2 - y^2)/(x + y)$ também seria um número racional por ser a divisão de números racionais, em que o denominador é diferente de zero (pois, caso contrário teríamos $x^2 - y^2 = 0 \cdot (x - y) = 0$ o que contraria a hipótese). Assim,

$$x = \frac{(x + y) + (x - y)}{2}$$

seria um número racional, por ser a divisão de dois números racionais. Um absurdo, pois contrariaria a hipótese de $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Outro caso seria supor que $x - y \in \mathbb{Q}$ e, de modo análogo, teríamos $x \in \mathbb{Q}$, um absurdo novamente. Restando apenas a possibilidade de $x + y$ e $x - y$ serem irracionais. ■

Com o Teorema 2 em mãos e com a noção de que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são números irracionais e que

$$(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1 \in \mathbb{Q},$$

temos que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (como já mostramos) e $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ são irracionais.

Um outro fato interessante a ser investigado diz respeito às potências de números irracionais. Por exemplo, o que podemos afirmar sobre o número a^b , em que a e b são números irracionais?

Exemplo 2. Existe um número irracional que elevado a outro número irracional terá como resultado um número racional. Ora, considerando o número $A = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, se A for um número

racional, nada teremos a mostrar. Por outro lado, se A for um número irracional, podemos tomar o número

$$C = A^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}.$$

O que comprova a afirmação do exemplo.

Esse exemplo é interessante pelo fato de não sabermos nada sobre a natureza de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Quanto ao caso de termos um número irracional elevado a outro número irracional resultando em um número irracional, deixamos como sugestão de exercício para os leitores.

O próximo teorema versa basicamente sobre os números racionais e as raízes de certos polinômios, mas, com a devida manipulação, podemos torná-lo um excelente ferramenta para ser usada na busca de números irracionais.

Teorema 3. *Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio de coeficiente inteiros. Seja $\beta \in \mathbb{Q}$, $\beta \neq 0$, uma raiz de $f(x)$. Escrevendo $\beta = r/s$, com $r, s \in (\mathbb{Z} - \{0\})$ e $\text{mdc}(r, s) = 1$, então r divide a_0 e s divide a_n .*

A demonstração do Teorema 3 pode ser encontrada em (HEFEZ; VILLELA, 2016, p. 155).

Observe que o polinômio $f(x) = x^n - p$, com $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ e p um número primo, tem como possibilidade para uma raiz racional o número da forma $\beta = r/s$, em que r divide $a_0 = p$ e s divide $a_n = 1$, ou seja, $r = \pm 1$ ou $r = \pm p$ e $\beta = \pm 1$ ou $\beta = \pm p$. Testando as possibilidades, temos que,

(i) se n for par, então

$$0 = f(\beta) = (\pm 1)^n - p = 1 - p \quad \text{ou} \quad 0 = f(\beta) = (\pm p)^n - p = p(p^{n-1} - 1).$$

Na primeira igualdade, teríamos $p = 1$, contrariando a primalidade de p . A segunda igualdade implica que $p(p^{n-1} - 1) = 0$, uma vez que $n > 1$. Dessa forma, $p = 0$ ou $p = 1$. Novamente uma contradição. Logo, se n for par, $f(x)$ não pode ter raízes racionais.

(ii) se n for ímpar, então

$$0 = f(\beta) = (\pm 1)^n - p = -1 - p \quad \text{ou} \quad 0 = f(\beta) = (\pm p)^n - p = -p(p^{n-1} + 1).$$

A veracidade da primeira igualdade implicaria que $p = -1$, o que é impossível, uma vez que p é primo. Para a segunda, teríamos $-p(p^{n-1} + 1) = 0$. Isso acarretaria em $p = 0$ ou $p^{n-1} = -1$. Em ambos os casos teríamos um absurdo, pois como $n - 1$ é par e p é um número primo. Logo, se n for ímpar, $f(x)$ não pode ter raízes racionais.

Concluimos, assim, que o polinômio $f(x) = x^n - p$, com $n \in \mathbb{N}$ e p um número primo, não possui raízes racionais. Por outro lado, sabemos que o número real $\alpha = \sqrt[n]{p}$ é uma raiz de $f(x)$. Pois,

$$f(\alpha) = \alpha^n - p = (\sqrt[n]{p})^n - p = p - p = 0.$$

Restando apenas a possibilidade de $\sqrt[n]{p}$ ser um número irracional. De sorte que, agora, para gerar números irracionais, basta variar o n no conjunto dos números naturais ou o p no conjunto dos números primos. Vale salientar o fato de que os dois conjuntos possuem uma quantidade infinita de elementos.

Exemplo 3. *Dado $n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$, os números*

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \dots, \sqrt[n]{2},$$

são sempre irracionais.

5. Considerações Finais

No início do trabalho, propusemo-nos a apresentar formas de como identificar alguns números irracionais. Na tentativa de alcançar tal objetivo, foi feita uma breve introdução sobre os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais, destacando conceitos cruciais para chegar às propriedades desejadas para tal.

Apresentados os conceitos, mostrou-se a existência de um número que não pode ser racional, como um primeiro exemplo dos números irracionais, a saber, a diagonal de um de um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. Observou-se que o conjunto dos números irracionais não é fechado para as operações básicas. Além disso, uma maneira de encontrar uma infinidade de números irracionais foi apresentada.

Deixamos como sugestão de pesquisa demonstrar que os números e (constante de Euler) e π (razão entre o comprimento de um círculo e seu diâmetro) são irracionais. Para isso, recomendamos o livro (FIGUEIREDO, 2011), onde fortes resultados sobre números transcendentos podem ser encontrados, podendo ser uma continuação de pesquisa.

Referências

- AVILA, G. S. de S. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3a. ed. São Paulo: Blucher, 2006.
- CAJORI, F. **Uma história da Matemática**. 3a. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.
- FIGUEIREDO, D. G. de. **Números Irracionais e Transcendentes**. 3a. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011.
- HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Polinômios e Equações Algébricas**. 1a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- MLODINOW, L. **A janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço**. Traduzido por Enézio E. de Almeida Filho. 3a. ed. São Paulo: Geração Editorial, 2010.
- NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais**. Traduzido por Renate Watanabe. 3a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1990.
- SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico [livro eletrônico]**. 1a. ed. São Paulo: Cortez, 2013.