



EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1ª ORDEM COM n VARIÁVEIS

Lucas Machado Fernandes Aquino

Universidade Federal da Paraíba, e-mail: lucasmachadofernandes2@gmail.com

Andrea Machado Fernandes Aquino

Universidade Federal do Cariri, e-mail: andreamachado.lp@gmail.com

Fernanda dos Santos Rosendo

Universidade Regional do Cariri, fsantrosendo@gmail.com

Ozana da Silva Alencar

Universidade Regional do Cariri, e-mail: ozana.alencar@urca.br

Núbia Matias do Nascimento

Universidade Regional do Cariri, e-mail: matias.nubia@gmail.com

RESUMO: O desenvolvimento do estudo das equações diferenciais ordinárias iniciou-se em meados do século XVII e XVIII com o surgimento do cálculo Diferencial e Integral liderados por Newton e Leibniz. Rapidamente, grandes matemáticos contribuíram para a expansão da Teoria das Equações Diferenciais através de pesquisas interessantíssimas no que diz respeito ao Cálculo das Variações, Teoria das Oscilações, Elasticidade e Dinâmica dos Fluídos, como por exemplo. A partir do século XIX, diversos pesquisadores interessaram-se em resolver equações diferenciais sujeitas à certas condições iniciais para conseguir compreender novas aplicações e fenômenos, principalmente no ramo da física. Estas questões ficaram conhecidas como problema de Cauchy ou problema de valor inicial. Nesta produção, apresentaremos a definição formal de uma classe de equações diferenciais: a de primeira ordem e n variáveis. Além disso, enunciaremos e provaremos um magnífico teorema de existência e unicidade que responde, utilizando fortemente a teoria de Espaços Métricos, o problema de valor inicial.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias; Primeira ordem; Teorema de existência e unicidade.

1. Introdução

Primeiramente, considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ com coordenadas retangulares (t, x) , onde $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, seja $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto que não necessariamente é da forma produto de abertos. Nestas condições, sejam $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma função contínua e $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem.

Um estudo bem interessante consiste na busca por soluções para tal equação. Formalmente, uma solução é uma função diferenciável $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, tal que para todo $t \in J$, tem-se $(t, \varphi(t)) \in U$ e $\frac{d\varphi}{dt}(t_0) = f(t_0, \varphi(t_0))$, $\forall t_0 \in J$, onde $\frac{d\varphi}{dt}(t_0)$ denota a derivada lateral correspondente no caso em que t_0 para um extremo de J .

Por mais inofensivo que pareça, buscar soluções analíticas de equações diferenciais ordinárias de 1^a ordem, com certas condições impostas, nem sempre é uma tarefa fácil, uma vez que não existe um único método de resolução que se aplique em todos os problemas. Podemos até questionar se sempre é possível encontrar soluções para tais problemas. A resposta é afirmativa, e a solução é única conforme o resultado principal deste trabalho.

2. Objetivos

Nesta produção, objetivamos apresentar um teorema clássico de existência e unicidade para o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (1)$$

com $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ diferenciável e U aberto.

3. Metodologia

A abordagem metodológica dá-se pela revisão bibliográfica e pelo aprofundamento das discussões.

4. Resultados

4.1 Resultados preliminares

Antes de demonstrarmos o teorema de existência e unicidade, vejamos algumas definições e resultados cruciais sobre Espaços Métricos.

Definição 1. Uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma métrica do conjunto M se para quaisquer $x, y, z \in M$ tivermos $d(x, y) \geq 0$ (com a igualdade se $x = y$), $d(x, y) = d(y, x)$ e $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Além disso, a notação (M, d) indica um espaço métrico.

O ambiente dos espaços métricos é fundamental na análise em geral. Nele conseguimos estender diversas propriedades básicas dos espaços euclidianos, como por exemplo, as caracterizações de alguns tipos de sequências e também seu modo de convergência. Isso nos motiva a definir:

Definição 2. Uma sequência (x_n) em (M, d) chama-se de Cauchy quando

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Em particular, dizemos que o espaço métrico (M, d) é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Vejamos a seguir uma aplicação bem útil.

Aplicação 1. O espaço $(\mathcal{C}(A, B), d)$ tal que

$$\mathcal{C}(A, B) = \{g : A \longrightarrow B; g \text{ é limitada e contínua}\} \quad e \quad d(g_1, g_2) = \sup_{t \in A} \|g_1(t) - g_2(t)\|,$$

para $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(A, B)$, é métrico.

Lema 1. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $K \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto compacto. O espaço métrico $(\mathcal{C}(I, K), d)$, com a métrica $d(\varphi, \psi) = \sup_{t \in I} |\varphi(t) - \psi(t)|$, é completo.

Demonstração. Ver [3]. □

Esta última definição nos motiva a enunciar o seguinte resultado:

Teorema 1 (Teorema do Ponto Fixo). Sejam (X, d) é um espaço métrico completo e $F : X \longrightarrow X$ uma função que satisfaz $d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y)$ para todo $x, y \in X$, com $0 \leq K < 1$. Nestas condições, $\exists! p \in X$ tal que $F(p) = p$.

Demonstração. Primeiramente provaremos que $\exists p \in X$ tal que $F(p) = p$. De fato, sejam $x \in X$ e $x_n = F^n(x)$. Observe que:

Afirmção 1: (x_n) é uma sequência de Cauchy;

Tome m e n números naturais quaisquer tais que $m < n$. Usando a desigualdade triangular recursivamente, temos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n).$$

Repare que,

$$d(x_l, x_{l+1}) = d(F(F^{l-1}(x)), F(F^l(x))) \leq K \cdot d(F^{l-1}(x), F^l(x)) \leq \dots \leq K^l \cdot d(x, F(x)),$$

para todo $l \in \{m, m+1, \dots, n-1, n\}$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq K^m d(x, F(x)) + K^{m+1} d(x, F(x)) + \dots + K^{n-1} d(x, F(x)) \\ &\leq \frac{K^m}{1-K} d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Isso prova que (x_n) é uma sequência de Cauchy, pois para quaisquer $n > m$ temos que $K^m \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$.

Afirmção 2: $d(x, x_m) \leq \frac{K^m}{1-K} d(x, F(x));$

Uma vez que X é completo e $(x_n) \subset X$ é uma sequência de Cauchy, pela afirmação anterior, existe um único $x \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Assim como na afirmação anterior, suponha $n > m$. Neste caso, temos

$$d(x, x_m) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_m) \leq d(x, x_n) + \frac{K^m}{1-K} d(x, F(x)).$$

Uma vez que $d(x, x_n) \rightarrow 0$, para $n \rightarrow \infty$, concluímos que

$$d(x, x_m) \leq \frac{K^m}{1-K} d(x, F(x)).$$

Afirmção 3: $F(x) = \lim x_n = x$;

Note que,

$$d(x, F(x)) \leq d(x, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, F(x)) \leq \frac{2K^{m+1}}{1-K} d(x, F(x)).$$

Nestas condições, para $m \rightarrow \infty$, obtemos $d(x, F(x)) = 0$. Logo, $F(x) = \lim x_n = x$. Por fim, provaremos a unicidade do problema. Sejam p e q dois pontos fixos. Logo,

$$d(p, q) = d(F(p), F(q)) \leq Kd(p, q)$$

o que implica que $d(p, q) = 0$. Assim, $p = q$. □

Antes de prosseguirmos com a demonstração do teorema principal, vejamos um lema que reduz o problema de valor inicial definido em (1) a um problema de resolução de uma equação integral.

Lema 2. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Então, uma função diferenciável $\phi : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução do PVI (1) se, e somente se, for uma solução da equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in I_\alpha.$$

Demonstração. Ver [1]. □

Inicialmente, definamos os conjuntos

$$I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\} \quad \text{e} \quad B_b = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| \leq b\},$$

além de $\Omega = I_a \times B_b$. Nestas condições, enunciaremos e provaremos o teorema clássico das EDOs de primeira ordem.

4.2 Teorema principal

Teorema 2 (Picard). *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, com U aberto, uma função contínua tal que existe $K > 0$ que satisfaz $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|$, para todo $(t, x), (t, y) \in \Omega \subset U$. Se $\|f(w)\| \leq M$ em $w \in \Omega$, então existe uma única função diferenciável $\phi : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$, que é solução do PVI em (1).*

Demonstração. Seja o espaço métrico $(C(I_\alpha, B_b), d)$, com $d(g_1, g_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |g_1(t) - g_2(t)|$ para $g_1, g_2 \in C(I_\alpha, B_b)$ quaisquer. Nestas condições, $(C(I_\alpha, B_b), d)$ é um espaço métrico completo pelo Lema 1, pois I_α e B_b são conjuntos compactos. Agora, para $g \in C(I_\alpha, B_b)$, seja a função

$$\begin{aligned} \varphi(g) : I_\alpha &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds \end{aligned}$$

Afirmção 1: $\varphi(g)$ está bem definida, para todo $g \in C(I_\alpha, B_b)$;

É fácil ver que tal afirmação é verdadeira, pois uma vez que f é contínua, ela também é integrável.

Afirmção 2: $\varphi(g) \in C(I_\alpha, B_b)$, para todo $g \in C(I_\alpha, B_b)$;

De fato, seja $\varphi(g) \in \varphi(C(I_\alpha, B_b))$, com $g \in C(I_\alpha, B_b)$. Note que $\varphi(g)$ é uma função contínua pois para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implica

$$|\varphi(g)(t) - \varphi(g)(a)| \leq \int_a^t |f(s, g(s))| ds \leq M|t - a| < M\delta < \varepsilon.$$

Além disso, para todo $t \in I_\alpha$, temos

$$\|\varphi(g)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, g(s))\| ds \leq M|t - t_0| \leq M \cdot \alpha \leq b.$$

Logo, $\varphi(g)(t) \in B_b$ e, conseqüentemente, sucede-se nossa afirmação.

Afirmção 3: φ é uma contração;

De fato, perceba que tomando $g_1, g_2 \in C(I_\alpha, B_b)$, temos

$$d(\varphi(g_1), \varphi(g_2)) \leq K \int_{t_0}^t \|g_1(s) - g_2(s)\| ds = K \cdot |t - t_0| \cdot d(g_1, g_2) \leq K\alpha \cdot d(g_1, g_2).$$

Dessa forma, concluímos que φ é uma contração se $K\alpha < 1$. Portanto, basta tomar $\alpha < 1/K$.

Repare que, pelas *Afirmções 1, 2 e 3*, podemos utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para garantir que φ possui um único ponto fixo, isto é, existe um único $\phi \in X$ tal que $\varphi(\phi) = \phi$. Portanto, concluímos que

$$\phi(t) = \varphi(\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds, \quad t \in I_\alpha.$$

e pelo Lema 2, concluímos que ϕ é diferenciável e solução do PVI. □

5. Considerações Finais

Nesta produção, a partir da revisão bibliográfica discutimos sobre o teorema de existência e unicidade de soluções para uma determinada classe de equações. Ainda há muito que reverberar dentro dessa mesma classe de equações e muito mais se mudarmos, por exemplo, a ordem da equação ou o número de variáveis, permitindo assim a modelagem de diversos problemas da física, economia, biologia dentre outras áreas.

Referências

- [1] MEDEIROS, A. A.; OLIVEIRA, M. de L. **Equações Diferenciais Ordinárias**, 2009.
- [2] SOTOMAYOR, J. A. P. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Notas de Aula.
- [3] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.